担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

複素数, 複素平面

作成日：April 16, 2018　Updated：April 16, 2018　実施日：April 17, 2018

複素数, 複素平面

複素数 $z = x + iy$ が与えられたとする．($x, y \in \mathbb{R}$. i は虚数単位で $i^2 = -1$ を満たす．) 複素数 z は 2 つの実数 (x, y) の組とみなすことができ, 座標平面上に表すことができる．すなわち, 直交座標をとった平面上で, $z = x + iy$ を座標 (x, y) をもつ点 (点 z と呼ぶ) に対応させればよい．(図 1 左図参照)

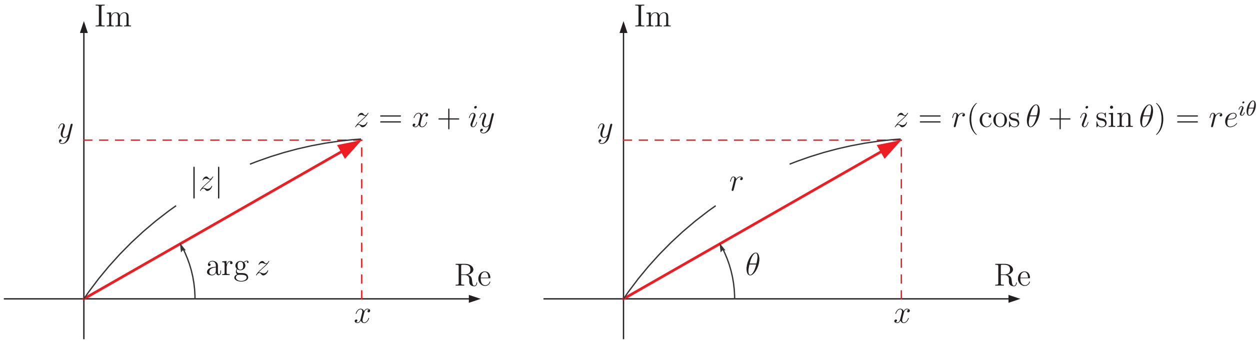


図 1: 複素平面 (右は極形式)

- $\overline{z} := x - iy$ を z の共役複素数と呼ぶ.
- x を z の実部 (real part) と呼び, $x = \mathrm{Re}\, z$ と表す．($x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ とも書ける.)
- y を z の虚部 (imaginary part) と呼び, $y = \mathrm{Im}\, z$ と表す．($y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ とも書ける.)
- x 軸, y 軸をそれぞれ実軸, 虚軸と呼ぶ.
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の絶対値 (absolute value) または z の大きさといい, 原点から点 z までの距離を表す．$z\overline{z} = |z|^2$ などが成り立つ.
- 線分 $0z$ と正の実軸のなす角を $\arg z$ ($\in \mathbb{R}$) と表し, z の偏角 (argument) と呼ぶ．偏角には 2π の整数倍の不定性がある.

$r := |z|$, $\theta := \arg z$ と書き表すと,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

となる (図 1 右図参照)．このような表記を極形式とよぶ．なお，2 つ目の等号はオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ による.

天下りであるが, 複素数 z に対する指数関数を次のように定義する:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

この無限和はすべての z に対して収束し (複素平面上で, ある点に限りなく近づき), また指数法則を満たす:

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

e^z の定義に $z = i\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) を代入すると，オイラーの公式が導かれる．また，$z = i\theta$, $w = i\varphi$ ($\theta, \varphi \in \mathbb{R}$) を代入すると三角関数の加法定理が導かれる．(問題 1 参照)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

例題 1. (複素数の演算と幾何学的意味)

(1) $\alpha = 2+i$, $\beta = 1+3i$ に対し, $\alpha+\beta$, $\beta-\alpha$, $-\alpha$, $\overline{\alpha}$, $i\beta$ を計算せよ. また, 複素数 $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ をベクトル (x, y) と同一視し, これらの複素数を複素平面に (ベクトルとして) 図示せよ.

(2) 複素数 $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に i を掛けるという操作は, 複素平面上で z に対してどのような作用を引き起こすと解釈できるか. また極形式で同様の計算をして考察せよ.

【解答】

(1) $\alpha+\beta = 3+4i$, $\beta-\alpha = -1+2i$, $-\alpha = -2-i$, $\overline{\alpha} = 2-i$, $i\beta = -3+i$. 複素平面に図示したものは図 2 の通り:

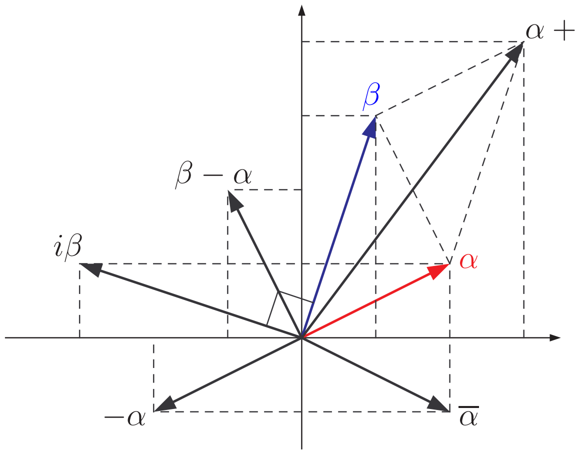


図 2: 例題 1 (1)

(2) $iz = i(x+iy) = -y+ix$. 複素平面を 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ と同一視すると, 複素数に i を掛ける作用は, $(x, y) \mapsto (-y, x)$ という変換に相当するが, これは角度 $\pi/2$ の回転を表す. ((1) の $i\beta$ の図示も参照.) 極形式では, $i = e^{i\pi/2}$ より, $z = re^{i\theta}$ と表すと, $iz = re^{i(\theta+\pi/2)}$ となるので, 角度 $\pi/2$ の回転を表すことがすぐに分かる.

(一般に, $z = re^{i\theta}$ に $\alpha = Re^{i\varphi}$ を掛ける作用は, $\alpha z = Rre^{i(\theta+\varphi)}$ より, R 倍の相似変換と角度 φ の回転を表す.)

問題 1. (オイラーの公式) オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を用いて, 以下の問いに答えよ.

(1) $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ を用いて表せ.

(2) 指数関数の指数法則 $e^{z+w} = e^z e^w$ に, $z = i\theta$, $w = i\varphi$ $(\theta, \varphi \in \mathbb{R})$ を代入し, 三角関数の加法定理を導け.

(3) ド・モアブル (de Moivre) の公式を, 指数法則を用いて示せ.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(4) 指数関数の定義から, 指数法則を示せ. ($e^z e^w$ を二重和の形で表し, 和の取り方を工夫する. 収束性は気にしなくてよい.)

担当教員 : 浜中 真志　研究室 : A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

例題 2. $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ を満たす複素数 z をすべて求めよ. (極形式で考えよ. 一般角における 2π の不定性に注意.) また複素平面に図示せよ.

【解答】

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$

とおくと, $z^n = 1$ より,

$r^n e^{in\theta} = e^{2\pi i k}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$

(1 を一般角で表していることに注意.)

これより, $r = 1$, $\theta = (2\pi k)/n$ が得られる.

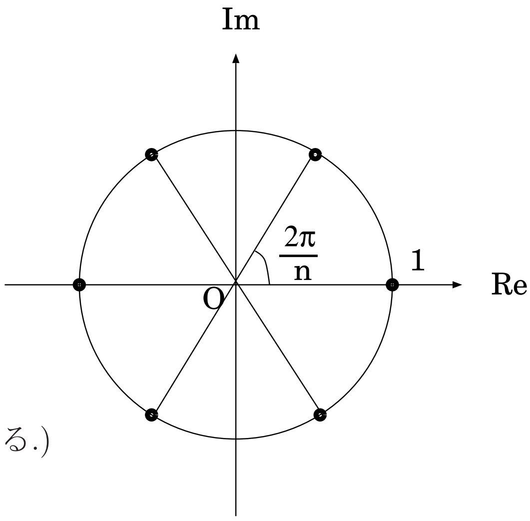
したがって求める複素数は,

$0 \leq \theta < 2\pi$ に注意すると,

$z = e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$.

複素平面に図示すると, 右図のようになる.

(n 個の解 z は複素平面の単位円上に等間隔で並んでいる.)



演習問題

問題 2. (基本的な計算) $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ とする.

(1) $z\overline{z}$ を計算せよ.　(2) $\mathrm{Im}\,\dfrac{1}{z}$ を計算せよ.　(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ を示せ.

(4) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ を示せ.　(5) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ を示せ.　(6) $|re^{i\theta}| = r$ を示せ. $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$

[コメント] (3) (4) より共役は自由に演算と交換できることに注意.

問題 3. (実部・虚部・極形式) e^z について以下の問いに答えよ.

(1) $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とあらわしたとき, e^z の実部, 虚部, および大きさを求めよ.

(2) $z = re^{i\theta}(\theta \in \mathbb{R}, r \geq 0)$ とあらわしたとき, e^z の実部, 虚部, および大きさを求めよ.

問題 4. (極形式とその応用) 複素数を用いて以下の関係式を証明しよう.

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(1) 3 つの複素数 $z = 2 + i$, $w = 3 + i$, $zw = (2+i)(3+i)$ を複素平面に図示せよ.

(2) $\theta_1 := \mathrm{Arctan}(1/2)$, $\theta_2 := \mathrm{Arctan}(1/3)$ とおき, 3 つの複素数 $z = 2 + i$, $w = 3 + i$, $zw = (2+i)(3+i)$ を極形式に表せ. また, 複素平面に角度 θ_1, θ_2 を書き込め.

(3) 指数法則を用いて, 与えられた式を示せ.

問題 5. (複素数列) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \left(\dfrac{i}{2}\right)^n$ で定義する. また $S_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ とおく.

(1) $S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2$, $S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ を複素平面に図示せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6. (オイラーの公式とその応用) オイラーの公式を用いて

$$C = \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta,$$
$$S = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta,$$

とし, $0 < \theta < 2\pi$ の範囲で $C = 0$ および $S = 0$ を満たす θ をすべて求めてみよう.

(1) z を $z \neq 1$ となる複素数とする. 等比数列の和 $A = z + z^2 + \cdots + z^n$ の公式を導け.

(2) C, S を式変形し, 各々を, $\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ に比例し, かつ虚数単位 i をあらわに含まない形に表せ. (ヒント: $C + iS$ を考え, オイラーの公式を用いよ.)

(3) $0 < \theta < 2\pi$ の範囲で $C = 0$ を満たす θ をすべて求めよ. 同様に $S = 0$ を満たす θ をすべて求めよ.

問題 7. (1 の 3 乗根) 1 の 3 乗根のうち, 複素平面で第 2 象限にあるものを ω と表す.

(1) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ を示せ.

(2) ω と ω^2 を, $a + ib$ の形と極形式 $z = re^{i\theta}$ $(a, b, r, \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta < 2\pi)$ で表し, 複素平面に図示せよ.

(3) $\omega^{18} + \omega^4 + \omega^{17}$ の値はいくらか.

(4) $\alpha^2 = \overline{\alpha}$ を満たす複素数 α をすべて求め, ω を用いて表せ.

問題 8. (複素数と図形)

(1) 複素平面上の点 α を中心とする半径 r の円の方程式を複素数 z を用いて表せ.

(2) 複素平面上の 2 点 α, β の垂直 2 等分線の方程式を複素数 z を用いて表せ.

(3) 複素関数 $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ によって, z 平面上の単位円の内部 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ は w 平面にどのようにうつされるか. 変換前の領域 D と変換後の領域 $D' = f(D)$ を図示せよ.

今週の宿題 (提出期限は 4 月 24 日 (火) 演習開始時です)

問題 9. (1 の 5 乗根)

(1) $z^5 = 1$ を満たす複素数 z をすべて求め, 複素平面に図示せよ.

(2) (1) の解の中で $\mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z > 0$ の領域にあるものを ω と表す. $\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1 = 0$ を示せ. これを用いて, $t := \omega + \omega^{-1}$ が満たす 2 次方程式を導出し, t の値を求めよ.

(3) $\cos(2\pi/5)$ の値を求めよ.

(4) $w^2 = \overline{w}^3$ を満たす複素数 w をすべて求め, 複素平面に図示せよ.

問題 10. (反転と円) $z\overline{z} = |z|^2$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ などに注意して以下の問いに答えよ.

(1) $|z - 9i| = 2|z|$ を満たす複素数 z の軌跡は円になる. その円の半径 r と円の中心座標 X を求めよ.

(2) 変換 $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$ によって, 前問の図形はどのような図形に写るか?