'21 10/11

§2 量子力学 (Quantum Mechanics = QM) の体系

2.1 基本原理

〈準備と記号〉

"関数列の収束先 ∈ $\mathcal{H}$"

$\mathcal{H}$: $\mathbb{C}$ 上完備な「内積」空間 ∋ $|\psi\rangle$ ket vector "(たて)ベクトル"

↕ エルミート共役

$\mathcal{H}^\dagger$: $\mathcal{H}$ の双対空間 ∋ $\langle\psi|$ bra vector "(よこ)ベクトル" (& c.c.)

← dagger (数学では「*」)

内積 : $\langle\psi|\psi'\rangle \in \mathbb{C}$

bracket

c.c. = complex conjugate

定義2.1 $\hat{F}$ を $\mathcal{H}$ 上の線形 operator とする (op. と略す)

$$\hat{F}|\varphi_\lambda\rangle = f_\lambda|\varphi_\lambda\rangle \quad (\lambda\in\Lambda) \quad \cdots (*)$$

とみなすとき, f_λ を $\hat{F}$ の固有値, $|\varphi_\lambda\rangle$ を $\hat{F}$ の固有関数という.

$|\hat{A}\psi\rangle := \hat{A}|\psi\rangle$

$\langle\hat{B}\psi| := |\hat{B}\psi\rangle^\dagger$

定義2.2 ${}^\forall|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle\hat{B}\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\hat{A}\psi_2\rangle$

が成り立つとき, $\hat{B}$ を $\hat{A}^\dagger$ と書き $\hat{A}$ のエルミート共役という.

(hermitian conjugate = h.c.)

定義2.3 $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ のとき $\hat{A}$ をエルミート op. という

(自己共役)

命題2.4 エルミート op. $\hat{F}$ の

(i) 固有値 f_λ は実数

(ii) 異なる固有値に属する固有関数は直交する $\xrightarrow{\text{正規化}}$ $\langle\varphi_\lambda|\varphi_{\lambda'}\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}$

定義2.5 正規直交系 $\{|\varphi_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ が完全系

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sum_\lambda |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda| = \hat{1}_{\mathcal{H}}$$

(このとき ${}^\forall|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $|\psi\rangle = \hat{1}_{\mathcal{H}}|\psi\rangle = \sum_\lambda |\varphi_\lambda\rangle\underbrace{\langle\varphi_\lambda|\psi\rangle}_{\text{展開係数} \in \mathbb{C}}$)

"基底"ということ

※ λ の重複度 ≧ 2 の場合 → 注2.12 参照

定義2.6 $\hat{F}$がオブザーバブル

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
- ・固有値 $f_\lambda \in \mathbb{R}$
- ・固有関数系 $\{|\varphi_\lambda\rangle\}$ が完全系

〈本題〉

$\mathcal{H}$上のオブザーバブル $\hat{H}$ (ハミルトニアン) が定めるシステムを考える

法則2.7 (量子力学の基本法則)

(I) システムの状態は $\mathcal{H}$ の元 $|\psi\rangle$ で表される. このとき特に $\mathcal{H}$ を状態空間,

$|\psi\rangle$ を状態ベクトルと呼ぶ. $|\psi\rangle$ と $C|\psi\rangle$ は同じ状態とみなす.

C ← const ($\neq 0$)

(II) 物理量は $\mathcal{H}$ 上のオブザーバブルで表される

(III) システムの時間発展はシュレーディンガー(Schrödinger)方程式で記述される:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$i = \sqrt{-1}$

$\hbar$: プランク定数

(IV) 物理量 $\hat{F}$ の期待値を以下のように定義し,

$$\langle \hat{F} \rangle := \frac{\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

状態 $|\psi\rangle$ において, 物理量 $\hat{F}$ を観測したときの期待値と解釈する.

注2.8 (IV)について (2.4の設定の下)　　宿題1 これで示せ　　$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ なら

$|\psi\rangle = \sum_\lambda |\varphi_\lambda\rangle \underbrace{\langle\varphi_\lambda|\psi\rangle}_{c_\lambda}$ と表したとき $\langle \hat{F} \rangle = \dfrac{\sum_\lambda f_\lambda |c_\lambda|^2}{\sum_\lambda |c_\lambda|^2} = \sum_\lambda f_\lambda |c_\lambda|^2$

注 $\langle\psi| = \sum_\lambda \overline{c_\lambda}\langle\varphi_\lambda|$

1回の観測で得られる測定値は f_λ ($\in \mathbb{R}$) のどれか. そのときシステムの状態は

$|\psi\rangle$ から $|\varphi_\lambda\rangle$ に (確率 $|c_\lambda|^2$ で) (突如) 遷移する. ⇝ 観測問題

← $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ のとき

注2.9 $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ のとき、(I)の定数の不定性は $|\psi\rangle \sim \underset{\sim}{e^{i\theta}}|\psi\rangle$

U(1)因子の不定性 $(\theta\in\mathbb{R})$ となる

〈システムの時間発展の記述〉 $\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial t} = 0\right.$ とする$\left.\right)$

- Schrödinger picture (S) : $|\psi(t)\rangle$ が時間発展（$\hat{F}$は固定） ⇔ Sch. eq.
- Heisenberg 〃 (H) : $\hat{F}(t)$ が 〃 （$|\psi\rangle$は固定） ⇔ Heisenberg eq.

(S) → (H)

Sch. eq. $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ より

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}}_{\text{ユニタリ}\ (\hat{H}:\text{エルミート})}\underbrace{|\psi(0)\rangle}_{=:|\psi\rangle} \Rightarrow \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

一定

オブザーバブル $\hat{F}$ の期待値

$$\langle\hat{F}(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{F}|\psi(t)\rangle$$

$$= \langle\psi|\underbrace{e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\hat{F}e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}}_{\hat{F}(t)}|\psi\rangle$$

時間発展を op. におしつける

$$\frac{d\hat{F}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}(\hat{H}\hat{F}-\hat{F}\hat{H})e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$$

← 宿題2 $\hat{F}(t)$ の def から Heis. eq. を導け

$[\hat{A},\hat{B}] := \hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ 交換子積

$$= \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}(t),\hat{H}] \quad : \text{Heisenberg eq.}$$

命題2.10 $[\hat{F},\hat{H}] = 0 \Rightarrow \hat{F}$ は保存量 (i.e. $\frac{d\hat{F}}{dt} = 0$)

注2.11 これは古典力学における Poisson括弧 $\{\ ,\ \}_{P.B.}$ を op. に対する交換子 $\frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$ におきかえたもの

☺ (注2.11)

古典力学(解析力学)

〈簡単のため1次元で議論〉

x: 物体の位置, p: 物体の運動量

$$H(x,p) := \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{V(x)}_{\text{ポテンシャルエネルギー}} \quad \text{(ハミルトニアン) として}$$

①

(ハミルトンの)正準方程式: $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial q} \overset{①}{=} \dfrac{1}{m}p$ (pとVの関係), $\dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$ (保存力) (運動方程式)

Poisson 括弧:

$$\{f, g\}_{P.B.} := \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}$$

このとき, $F = F(x,p)$ に対して

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{P.B.} \overset{☺}{=} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x} \overset{\text{代入}}{=} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dt} = \frac{Fの全微分}{dt} \quad \blacksquare$$

が成り立つ.

注2.12

命題2.4(ii)は λの重複度が2以上でも成り立つ. (これがエルミート性の帰結)

$|\varphi_\lambda\rangle \rightsquigarrow |\varphi_{\lambda,k}\rangle$ と表すと, 2.4(ii), 2.5の式は以下のようになる

(k: 1からλの重複度まで走るラベル)

(正規直交性) $\langle \varphi_{\lambda,k} | \varphi_{\lambda',k'}\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'}$

(完全性) $\displaystyle\sum_{\lambda,k} |\varphi_{\lambda,k}\rangle\langle\varphi_{\lambda,k}| = 1_{\mathcal{H}}$

2.2 正準交換関係と不確定性原理

'21 10/18

定義 2.13 (x^i, p_i) を古典力学での粒子の正準変数(位置,運動量)とする。
← $i = 1, 2, 3$ (x, y, z成分)

これらを、以下をみたすように $\mathcal{H}$ 上の ops. $\hat{x}$, $\hat{p}$ におきかえる操作を正準量子化という.

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta^i_j, \quad [\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

正準交換関係 (Canonical Commutation Relation = CCR) と呼ぶ

(基本ポアソン括弧 $\{x^i, p_j\}_{P.B.} = 1$ 等において、$\{\ ,\ \}_{P.B} \to \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$ とおきかえたもの)

以後 簡単のため 空間1次元で考える

例 2.14 (CCRの例)

「A表示」 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\hat{A}$ を対角化する表示

(i) $\hat{x} = x, \ \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ (x表示)
(Schrödinger量子化)

$\exists \{|x\rangle\}_{x \in \mathbb{R}}$ 完全系 s.t. $\begin{cases} \hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \\ \hat{p}|x\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}|x\rangle \end{cases}$

(ii) $\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, \ \hat{p} = p$ (p表示)

$\exists \{|p\rangle\}_{p \in \mathbb{R}}$ s.t. $\begin{cases} \hat{x}|p\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}|p\rangle \\ \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \end{cases}$

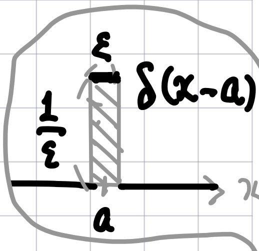
定義 2.15 $\Lambda = \mathbb{R}$ のとき

$|\varphi_\lambda\rangle$ を $|\lambda\rangle$ と書いている

- 正規直交系 $\Leftrightarrow$ $\langle\lambda|\lambda'\rangle = \delta(\lambda - \lambda')$
- 〃 が完全系 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, |\lambda\rangle\langle\lambda| = 1_{\mathcal{H}}$

cf. Gelfandの3つ組
$(\Omega, \mathcal{H}, \Omega')$
Ω: $\mathcal{H}$より小さい, Ω': $|x\rangle$

定義 2.16 (Diracのデルタ関数)



以下をみたす汎関数 $\delta: f \mapsto f(a)$ を delta-fcn. と呼ぶ

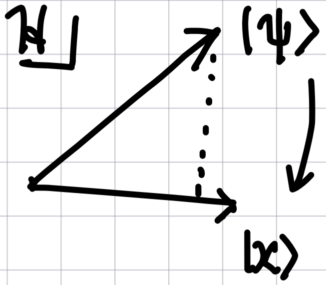
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\, dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a) \quad (a \in \mathbb{R})$$

$f(x)$: test fcn.

ある物理屋の妄想 . .

命題 2.17 $\displaystyle \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dk$

注2.18 $\{|x\rangle\}$ について



位置を測定

↓ 遷移(注2.8)

(遷移確率) $|\psi\rangle = \text{“}\sum_x\text{”}\, C_x |x\rangle$

$$\text{(遷移確率)} = |C_x|^2 = |\underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{=\psi(x)}|^2 = |\psi(x)|^2$$

Bornの確率解釈

$$\langle\psi|\psi\rangle = \underbrace{\int dx\, \overline{\psi(x)}\,\psi(x)}_{\text{標準的内積}} = \int dx\, \langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$\langle\psi| = \text{“}\sum_x\text{”} \langle x|\overline{C_x}$

$\forall|\psi\rangle \quad \int dx\, |x\rangle\langle x| = 1$

$$\forall\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \underset{\uparrow\text{完全系}}{=} \int dx'\, \underbrace{\langle x|x'\rangle}_{\delta(x-x')}\underbrace{\langle x'|\psi\rangle}_{\psi(x')}$$

となるべし

注2.19 $|x\rangle \to |p\rangle$ の基底変換

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \underset{\uparrow p\text{の完全系}}{=} \int dp\, \underbrace{\langle x|p\rangle}_{?}\underbrace{\langle p|\psi\rangle}_{\psi(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}\psi(p)$$

Fourier変換!

一方

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\langle x|p\rangle$$

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = p\langle x|p\rangle \longrightarrow p(x) = A e^{\frac{ipx}{\hbar}}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

U(1)因子の不定性 $e^{i\theta}$ (注2.9) は $e^{i\theta} = 1$ とした

宿題1 $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ を示せ

(答) $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p') \longleftrightarrow 2\pi\hbar|A|^2\delta(p'-p)$ 　$\delta(x) = \delta(-x)$ より

↑ xの完全系

$$= \int dx\, \underbrace{\langle p|x\rangle}_{\bar{A}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}\underbrace{\langle x|p'\rangle}_{Ae^{\frac{ip'x}{\hbar}}} = |A|^2\int dx\, e^{\frac{ix}{\hbar}(p'-p)} \underset{x\mapsto x\hbar}{=} |A|^2\hbar\int dx\, e^{ix(p'-p)} \underset{2.17}{=} 2\pi\hbar|A|^2\delta(p'-p)$$

命題2.20 $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$: エルミート ops. が $[\hat{A},\hat{B}]=i\hat{C}$ をみたすとき 7

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{\langle\hat{C}\rangle^2}{4} \quad \text{(Robertsonの不等式)} \qquad \left(\Delta\hat{F}:=\hat{F}-\langle\hat{F}\rangle\right)$$

☺ $I(\alpha):=\langle{}^\forall\psi|\underbrace{(\alpha\Delta\hat{A}-i\Delta\hat{B})(\alpha\Delta\hat{A}+i\Delta\hat{B})}_{(\Delta\hat{A})^2\alpha^2+i[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}]\alpha+(\Delta\hat{B})^2}|\psi\rangle=\underbrace{|(\alpha\Delta\hat{A}+i\Delta\hat{B})|\psi\rangle|^2}_{実数値}\geq 0$

$(\alpha\in\mathbb{R})$

$$=\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\alpha^2-\langle\hat{C}\rangle\alpha+\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \qquad 判別式\leq 0 \Rightarrow 与式 ■$$

$$\left(等号成立 \Rightarrow \alpha=\frac{\langle\hat{C}\rangle}{2\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle}\right)$$

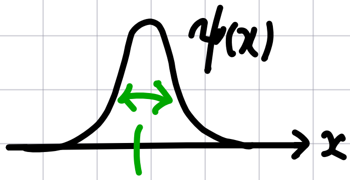
系2.21 $\hat{A}=\hat{x},\ \hat{B}=\hat{p},\ \hat{C}=\hbar$ で

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{(Heisenbergの不確定性原理)} \qquad \left(\Delta F:=\sqrt{\langle(\Delta\hat{F})^2\rangle}\right)$$

注2.22 等号成立 ⇔ Gaussian (波束)

$$\left(\underbrace{\langle\hat{x}\rangle=0,\langle\hat{p}\rangle=0}\ なら\quad \psi(x)=Ae^{-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2}}\right)$$

$\langle\psi|\psi\rangle=1$ から A が決まる



半値幅 $\sim\Delta x$

大↑小

小↓大

半値幅 $\sim\Delta p$

☺ このときを考える.

$$\alpha=\frac{\hbar}{2(\Delta x)^2}\ \&\ (\alpha\Delta\hat{x}+i\Delta\hat{p})|\psi\rangle=0 \quad \cdots ①$$

$\langle x|$ → ⇓

$$\langle x|(\alpha\underbrace{\Delta\hat{x}}_{\hat{x}-\underbrace{\langle\hat{x}\rangle}_{0}}+i\underbrace{\Delta\hat{p}}_{\hat{p}-\underbrace{\langle\hat{p}\rangle}_{0}})|\psi\rangle \Rightarrow \left(\alpha x+\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)=0 ■$$

x

$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

(答) $\psi(p)=A'e^{-\frac{p^2}{4(\Delta p)^2}}$

☺ $\langle p|①$ & $\Delta x\Delta p=\frac{\hbar}{2}$ より ■

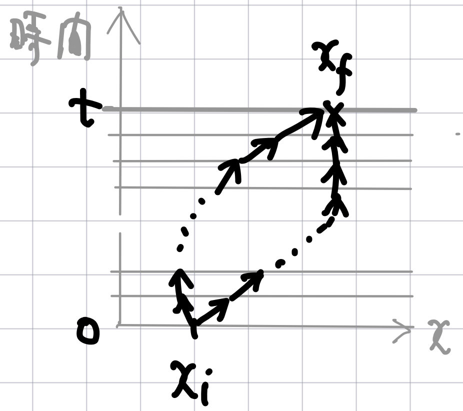
宿題2 $\langle\hat{x}\rangle=0,\langle\hat{p}\rangle=0$ のとき $\psi(p)$ を求めよ

'21 10/25

例2.23 (経路積分)

• $|x_i\rangle \underset{}{\xrightarrow{\text{時間発展}}} |x_f\rangle$ となる確率 Z を求めたい。

$t=0$ 　　　　　時刻 t



$$Z = \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} | x_i \rangle$$

$\parallel$ 　$\Delta t = \frac{t}{N}$ (N等分) とする

$$\langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} \cdot \cdots \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} | x_i \rangle$$

x_{N-1} 　$x_{N-2} \cdots x_1$ の完全系

$\parallel$

$$\int dx_1 \cdots dx_{N-1} \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} | x_{N-2} \rangle \cdots \langle x_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} | x_i \rangle$$

p_{N-1} 　p_{N-2} 　$\cdots$ 　p_0 の完全系

$\parallel$

$$\int dx_1 \cdots dx_{N-1} dp_0 \cdots dp_{N-1} \underbrace{\langle x_f | p_{N-1} \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p_{N-1} x_f}} \underbrace{\langle p_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} | x_{N-1} \rangle}_{=\ \langle p_{N-1} | x_{N-1} \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} H(x_{N-1}, p_{N-1})\Delta t}} \underbrace{\langle x_{N-1} | p_{N-2} \rangle} \underbrace{\langle p_{N-2} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t}} \cdots$$

$$\cdots |x_1\rangle \underbrace{\langle x_1 | p_0 \rangle} \underbrace{\langle p_0 | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} | x_i \rangle}$$

$$\underbrace{\langle p_{N-1} | x_{N-1} \rangle}_{=\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} p_{N-1} x_{N-1}}}$$

$$H(x,p)\,\langle p | x \rangle = \langle p | \hat{H}(\hat{x}, \hat{p}) | x \rangle$$

x 　p

宿題1
N=3として
この式まで
導け

$\parallel$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} dp_0 \cdots dp_{N-1}\, e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ p_j (x_{j+1} - x_j) - H(x_j, p_j) \Delta t \right\}} \quad \begin{pmatrix} x_0 := x_i \\ x_N := x_f \end{pmatrix}$$

$\downarrow N \to \infty$

$L(x, \dot{x})$: ラグランジアン! 　　$S := \int_0^t L\, dt$ (作用積分)

$$\int \mathcal{D}x \mathcal{D}p\, e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \overbrace{(p\dot{x} - H(x,p))}^{L(x,\dot{x})} dt} = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p\, e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

dot = 時間微分

「経路積分」 = すべての経路についての和

§3 シュレーディンガー方程式の解法(空間1次元)

3.1 一般的事項

Sch. eq. $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \underbrace{\hat{H}(\hat{x},\hat{p})}_{=\frac{1}{2m}\hat{p}^2+\underbrace{V(\hat{x})}_{\text{ポテンシャル}}}|\psi(t)\rangle$ ：エルミートとする

$\langle q|\hat{q} = \langle q|q$

$\langle q|\hat{p} = \langle q|\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$

左から $\langle x|$ をかける

$\psi(x,t) := \langle x|\psi(t)\rangle$

x 表示での Sch. eq. $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H\left(x,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\underbrace{V(x)}_{\mathbb{R}\text{値}}\right)\psi(x,t) \quad \cdots (*)$$

変数分離を考える：

$$\psi(x,t) = f(t)\,\varphi(x)$$

$$(*) \Rightarrow \underbrace{\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}}_{t\text{のみ}} = \underbrace{\frac{H\varphi(x)}{\varphi(x)}}_{x\text{のみ}} = E\ (\text{定数})$$

※ 物理で登場する関数は、断りがなければすべて C^∞ 級

$$\therefore \begin{cases} f(t) = a\,e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\varphi(x) = \underset{\in\mathbb{R}}{E}\,\varphi(x) \end{cases}$$

← この固有値問題を解きたい

このとき $|\psi(x,t)|^2 = |a|^2|\varphi(x)|^2$ ：時間変化しない(定常状態)

定義3.1 $\varphi(x)$ が2乗可積分のとき、システムは束縛状態であるという。

〃　　そうではない　　〃　　散乱状態　　〃

定義3.2 $\psi(x,t) = Ae^{i(kx\mp\omega t)}$ を平面波解という

k: 波数
ω: 角振動数

例3.3 $V = V_0$（定数）の場合

宿題2 $f(x-vt)$の形の関数は、xの正の向きに速さvで進む「波」を表すことを説明せよ

x微分

$$\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\varphi = 0$$

(i) $E > V_0$ のとき $\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$　　$k := \dfrac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$ …①

(ii) $E < V_0$ のとき $\varphi(x) = Ce^{\rho x} + De^{-\rho x}$　　$\rho := \dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$ …②

※ (i) は $f(t)$ と合わせれば平面波

∵ $E = \hbar\omega$ として $\psi(x,t) = \underbrace{A'e^{i(kx-\omega t)}}_{x\text{の 正方向}} + \underbrace{B'e^{-i(kx+\omega t)}}_{\text{負方向 に 進む波}}$

また、$p := \hbar k$ として、$V_0 = 0$ とすると、$p \overset{①}{=} \sqrt{2mE} \Leftrightarrow E = \dfrac{p^2}{2m}$

自由粒子の運動エネルギー

命題3.4 $\varphi(x)$: 有界とする。

ポテンシャル $V(x)$ が $x=a$ で不連続かつその近傍で有界のとき

$\varphi(x)$ および $\varphi'(x)$ は $x=a$ で連続

∵
$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{d^2\varphi}{dt^2}\,dx = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}(E-V(x))\varphi(x)\,dx$$

$$\therefore \left|\frac{d\varphi}{dt}(x=a+\varepsilon) - \frac{d\varphi}{dt}(x=a-\varepsilon)\right| \leqq \frac{2m}{\hbar^2}\sup_{x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}\left(|E-V_0||\varphi(x)|\right)\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}dx$$

$$= 2\varepsilon \times (\text{有限}) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

同様に $|\varphi(a+\varepsilon) - \varphi(a-\varepsilon)| \leqq 2\varepsilon \sup|\varphi'(x)| \xrightarrow{\;〃\;} 0$ ■

命題3.5 1次元システムの束縛状態$\varphi(x)$の零点が高々有限個であり、かつ $|\varphi(x)| \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$ とする。このとき

(i) エネルギー固有値Eに関して縮退がない

(ii) $V(x)=V(-x)$ 偶 $\Rightarrow$ $\varphi(-x)=\pm\varphi(x)$ 偶か奇

(iii) $\varphi(x)$は実関数にとれる.

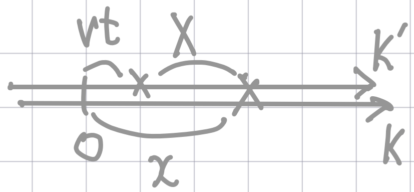
縮退がある $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ 同一固有値をもつ固有関数が2つ以上ある.

☺ レポートにします

宿題2 解答例

$X := x - vt$ とおくと. $f(x-vt)=f(X)$ … ①

ここで座標変換 $(x,t) \mapsto (X,t)$ を考える.
K系　K'系と呼ぶ



K'系はK系に対して速さvで正方向に運動する座標系である.

一方, ①よりK'系で見た関数形(波形)は時間変化しない.

以上により, K系から見た波形はxの正の向きに速さvで進む波を表す.

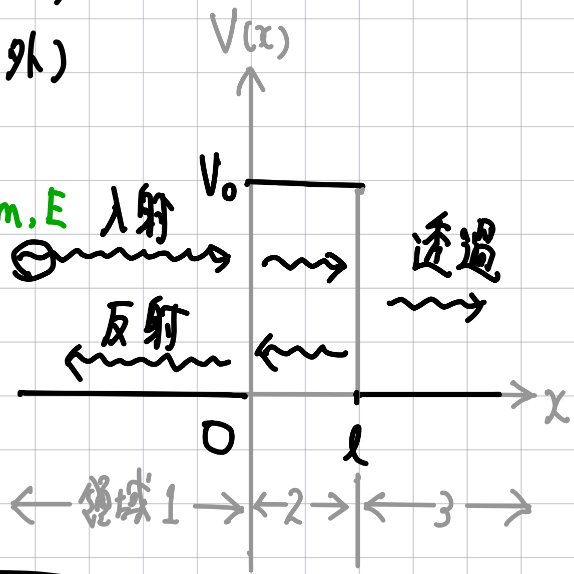
3.2 ポテンシャル障壁による散乱問題

例3.6

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \ (>0) & (0 \leqq x \leqq l) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

このポテンシャル障壁に $x=-\infty$ から自由粒子 (m, E) が入射

m：質量、E：エネルギー (given)



(i) $E > V_0$ のとき

例3.3より

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ \varphi_2(x) = Fe^{i\alpha x} + Ge^{-i\alpha x} \\ \varphi_3(x) = Ce^{ikx} \end{cases} \qquad k := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \alpha := \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

宿題1 $\frac{C}{A}$ の式を計算して導け

命題3.4 の b.c. (=boundary condition) より

$$x=0: \quad A+B = F+G, \quad ik(A-B) = i\alpha(F-G)$$

$$x=l: \quad Ce^{ikl} = Fe^{i\alpha l} + Ge^{-i\alpha l}, \quad ikCe^{ikl} = i\alpha(Fe^{i\alpha l} - Ge^{-i\alpha l})$$

$$\therefore \frac{B}{A} = \frac{(k^2-\alpha^2)(1-e^{2i\alpha l})}{(k+\alpha)^2-(k-\alpha)^2e^{2i\alpha l}}, \quad \frac{C}{A} = \frac{4k\alpha\, e^{i(\alpha-k)l}}{(k+\alpha)^2-(k-\alpha)^2e^{2i\alpha l}}$$

方程式4つ
未知変数5つ

$$\therefore (*) \begin{cases} \text{反射率} := \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(1 + \frac{4(k\alpha)^2}{(k^2-\alpha^2)\sin^2\alpha l}\right)^{-1} \\ \text{透過率} := \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \left(1 + \frac{(k^2-\alpha^2)\sin^2\alpha l}{4(k\alpha)^2}\right)^{-1} \end{cases}$$

和 $=1$

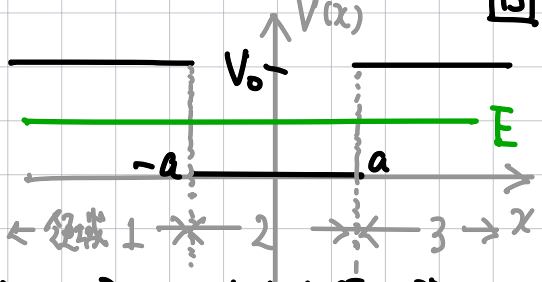
※ $\alpha l = n\pi$ で $(n=1,2,3,\cdots)$
$\left|\frac{B}{A}\right|^2 = 0, \ \left|\frac{C}{A}\right|^2 = 1$
(完全透過)

(ii) $E < V_0$ のとき

$\beta := \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$ とおいて、(*) の $\alpha \mapsto i\beta$ とおきかえればよい

$\left(\left|\frac{C}{A}\right|^2 \neq 0 : \text{トンネル効果!}\right)$

3.3 井戸型ポテンシャルによる束縛状態



例3.7 $V(x) = \begin{cases} 0 & : |x| \leqq a \\ V_0 (>0) & : |x| > a \end{cases}$

に エネルギー E ($0<E<V_0$) の粒子が束縛されている。(固有値問題を解く)

$V(-x) = V(x)$ より、波動関数 $\varphi(x)$: 偶 or 奇 (3.5(ii))

(i) $\varphi(x)$ が偶関数のとき

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = Be^{\beta x} + \cancel{B'e^{-\beta x}} \\ \varphi_2(x) = A\cos\alpha x \\ \varphi_3(x) = Be^{-\beta x} + \cancel{B'e^{\beta x}} \end{cases}$$

← 不適 (∵ 束縛 ⇔ 2乗可積分 ⇒ $|\varphi(x)| \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$)

$\alpha := \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\beta := \dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

$x = \pm a$ での b.c. :

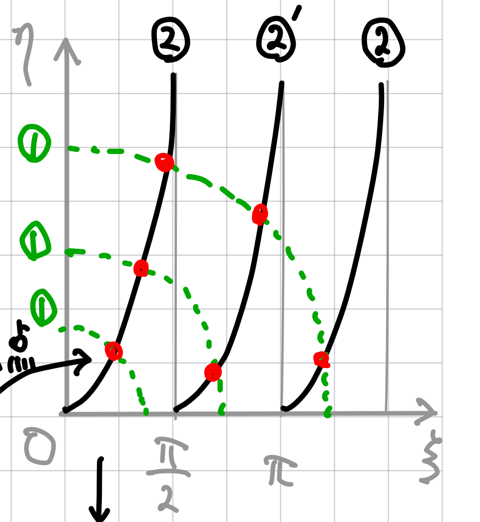
$$Be^{-\beta a} = A\cos\alpha a, \quad B\beta e^{-\beta a} = A\alpha\sin\alpha a$$

A, B & E? 式3つ, 未知変数3つ!

規格化条件: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$

$\xi := \alpha a\ (>0)$, $\eta := \beta a\ (>0)$ とすると

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \cdots ①, \quad \eta = \xi\tan\xi \cdots ②$$



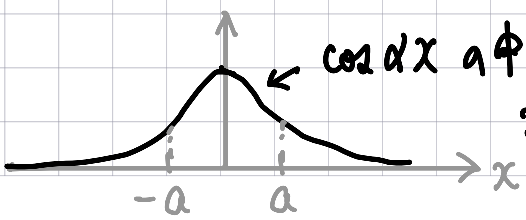
↓ 交点の値から、α, β (つまり E) が定まる。(離散的)
(交点なし ⇔ 解なし)

(ii) $\varphi(x)$ が奇関数のとき (詳しくはレポート)

同様に ① & $\eta = -\xi\cot\xi \cdots ②'$

エネルギー固有値最小 ⇔ α が最小 (交点のξの値が最小)

このときの $\varphi(x)$ の概形:



← $\cos\alpha x$ の中で α 最小かつ $x = \pm a$ でなめらかに指数関数に接続

3.4 調和振動子

固有値

Dirac の記法で代数的に解く (固有値問題を解きエネルギー準位を求める)

$$\hat{H}(\hat{x},\hat{p}) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

まず次の ops. を def:

エルミート共役

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

$\hat{H}$ の固有値問題 $\Leftrightarrow$ $\hat{N} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有値問題

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \Rightarrow [\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$$

また、$[\hat{N},\hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad \cdots ①$

$[\hat{N},\hat{a}] = -\hat{a} \quad \cdots ②$

宿題2 これを示せ

($[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$ を用いてよい)

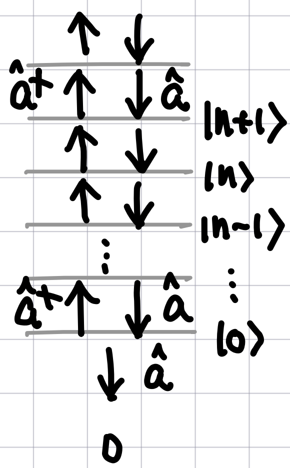
$\hat{N}$ の固有状態を $|n\rangle$, 固有値を λ_n とする: $\hat{N}|n\rangle = \lambda_n|n\rangle$

このとき、

$$\begin{cases} \hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle \overset{①}{=} (\hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger)|n\rangle = (\lambda_n + 1)\hat{a}^\dagger|n\rangle \\ \hat{N}\hat{a}|n\rangle \overset{②}{=} (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|n\rangle = (\lambda_n - 1)\hat{a}|n\rangle \end{cases}$$

λ_n

よって $\hat{a}^\dagger|n\rangle$, $\hat{a}|n\rangle$ も $\hat{N}$ の固有状態.



一方、$\langle n|\hat{N}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = |\hat{a}|n\rangle|^2 \geq 0$

$$\langle n|\hat{N}|n\rangle = \lambda_n \underbrace{\langle n|n\rangle}_{} = 1 \text{ (規格化可能とする)}$$

よってある n で $\hat{a}|n\rangle = 0$ とならなければならない

$\hat{N}$: number op. という

$\hat{a}^\dagger$: creation op.

$\hat{a}$: annihilation op.

これを $|0\rangle$ と書くと、

$\lambda_0 = \langle 0|\hat{N}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0$ より

$\lambda_n \in \{0,1,2,\cdots\}$ が言える. $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

エネルギー固有値 $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

$E_n \geq E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$: 零点エネルギー（量子ゆらぎの反映）

最低エネルギー ⇕ $|0\rangle$:「基底状態 (ground state)」

次に $|n+1\rangle = C_n \hat{a}^\dagger |n\rangle$ の C_n, d_n

$|n-1\rangle = d_n \hat{a}|n\rangle$ を求める

$$1 = \langle n+1|n+1\rangle = |C_n|^2 \langle n|\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}_{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}|n\rangle = (n+1)|C_n|^2 \quad \therefore C_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$1 = \langle n-1|n-1\rangle = |d_n|^2 \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|d_n|^2 \quad \therefore d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \leftarrow e^{i\theta} \text{の不定性は無視}$$

$$\therefore \begin{cases} \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\ \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n\rangle \end{cases} \qquad \therefore |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

波動関数（x表示）

$\hat{a}|0\rangle = 0$ （基底状態をまず求める）

$\langle x| \rightarrow \Downarrow$

$$\langle x|\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)|0\rangle = 0$$

x 　$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

$$\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)\underbrace{\langle x|0\rangle}_{\varphi_0(x)\ \text{波動関数}} = 0 \rightarrow \varphi_0(x) = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

位相因子 $= 1$

$$A = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \leftarrow \langle 0|0\rangle = 1$$

xの完全系

(第n番目の)励起状態の波動関数 $\varphi_n(x)$ も同様に求まる:

Aを計算して**宿題1** 求めよ。（$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いてよい）

$$\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle = \langle x|\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

$$= N_n\left[\xi - \frac{d}{d\xi}\right]^n e^{-\frac{\xi^2}{2}} = N_n \underbrace{H_n(\xi)}_{\text{エルミート多項式}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\xi := \beta x, \quad \beta := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad N_n := \sqrt{\frac{\beta}{\pi^{\frac{1}{2}} n!\, 2^n}}$$

$$H_n(\xi) := (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}$$

§4 シュレーディンガー方程式の解法(空間3次元)

4.1 QM (3次元)

粒子の位置: $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

〃 運動量: $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \equiv (p_x, p_y, p_z)$

(CCR) $[\hat{x}_k, \hat{p}_\ell] = i\hbar\,\delta_{k\ell}$ $\quad k, \ell \in \{1, 2, 3\}$

(x表示) $\hat{x}_k |x_k\rangle = x_k |x_\ell\rangle$

$\langle x_k | x'_\ell \rangle = \delta_{k\ell}\,\delta(x_k - x'_\ell)$

$\int dx_k\, |x_k\rangle\langle x_k| = \hat{1}_{\mathcal{H}_k}$

$\hat{x}_1, \hat{p}_1 \quad \hat{x}_2, \hat{p}_2 \quad \hat{x}_3, \hat{p}_3$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$

(Sch. eq.) $i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}})\, |\psi(t)\rangle$

$\downarrow$ 左から $\underset{\langle x| \otimes \langle y| \otimes \langle z|}{\underset{\shortparallel}{\langle \vec{r}|}}$ をかける $\left(\langle \vec{r} | \psi(t) \rangle =: \psi(\vec{r}, t) \right)$

<u>$\vec{r}$表示</u> $i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \underbrace{H\left(\vec{r}, \frac{\hbar}{i}\nabla\right)}_{\shortparallel} \psi(\vec{r}, t)$

$-\dfrac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})$

ナブラ $\nabla := \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right)$

$\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$: ラプラシアン

$\psi(\vec{r}, t) = f(t)\,\varphi(\vec{r})$

(変数分離)

$\downarrow$

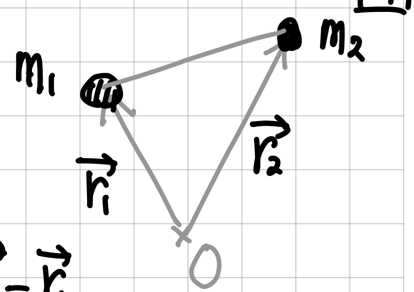
<u>定常状態</u>

$$\begin{cases} f(t) = a\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \\ \left[-\dfrac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) = E\, \varphi(\vec{r}), \quad E \in \mathbb{R} \\ |\psi(\vec{r}, t)|^2 = |a|^2 |\varphi(\vec{r})|^2 \end{cases}$$

$\uparrow$ エネルギー固有値

4.2 2体問題

$\vec{p}_i := m_i \dot{\vec{r}}_i$ ← 時間ビブン



ハミルトニアン $H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$

$\downarrow$

重心座標 $\vec{R} := \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$, 相対座標 $\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

全質量 $M := m_1 + m_2$, 換算質量 $\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ $\left(\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$

$\vec{P} := M\dot{\vec{R}}$, $\vec{p} := \mu\dot{\vec{r}}$, $r := |\vec{r}|$ $\quad m_1 \gg m_2 \Rightarrow \mu \fallingdotseq m_2$

$$H = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^{\,2} + V(r)$$ ← 宿題2 これを示せ

量子化: $[\hat{x}_k^{(1)}, \hat{p}_l^{(1)}] = [\hat{x}_k^{(2)}, \hat{p}_l^{(2)}] = i\hbar\delta_{kl}$ $\left(\Rightarrow \underset{\text{重心}}{[\hat{X}_k, \hat{P}_l]} = \underset{\text{相対}}{[\hat{x}_k, \hat{p}_l]} = i\hbar\delta_{kl}\right)$

Sch. eq. (位置表示) $\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{R},\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\vec{R}} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\vec{r}} + V(r)\right]\Psi(\vec{R},\vec{r},t)$

$\downarrow \quad \Psi(\vec{R},\vec{r},t) = e^{i\frac{\vec{P}'\cdot\vec{R}}{\hbar} - i\frac{\vec{P}'^2}{2M\hbar}t}\,\psi(\vec{r},t)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\vec{r}} + V(r)\right]\psi(\vec{r},t)$$ 1粒子の eq. に帰着

4.3 角運動量と極座標系

$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{321} = 1$ 他$=0$

エディントンのイプシロン
完全反対称テンソル

<u>定義4.1</u> 軌道角運動量 op. (エルミート)

$\hat{\vec{L}} := \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ $\quad$ (i.e. $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \cdots$)

<u>命題4.2</u> (i) $[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar\,\epsilon_{jkl}L_l$ $\quad$ (i.e. $[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = i\hbar\hat{L}_3, \cdots$)

lについて和がとられている (アインシュタインの規約)

(ii) $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_k] = 0$, $\forall k$

$a_k b_k := \sum_k a_k b_k$

命題4.3 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\vec{r}} + V(r)$ の極座標表示：

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{L}^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

∵ レポート

ここで $\vec{L}^2$ の固有値方程式を

$$\vec{L}^2 Y(\theta,\phi) = \hbar^2\lambda Y(\theta,\phi) \quad \cdots ①$$

と書き、$\varphi(\vec{r}) = R(r)Y(\theta,\phi)$ と変数分離：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2\lambda}{2\mu r^2} + V(r)\right]u(r) = E\,u(r) \quad \cdots ② \qquad \left(u(r) := rR(r)\right)$$

規格化条件：$\displaystyle\int_0^\infty \underbrace{|R(r)|^2 r^2}_{|u(r)|^2}dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi}|Y(\theta,\phi)|^2 d\phi = 1$

b.c. $\begin{cases} u(r\to\infty) = 0 \\ u(0) = 0 \quad \left(V(r)\sim\frac{1}{r} \text{ などの条件下}\right) \end{cases}$ (詳しくはレポート)

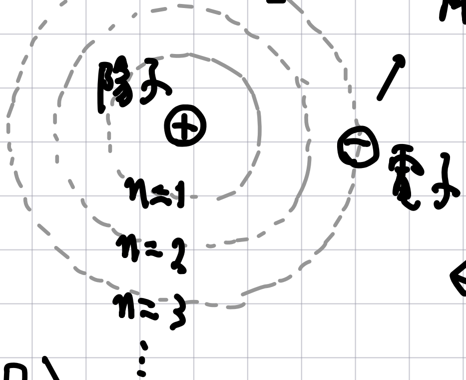
4.4 水素原子の束縛状態

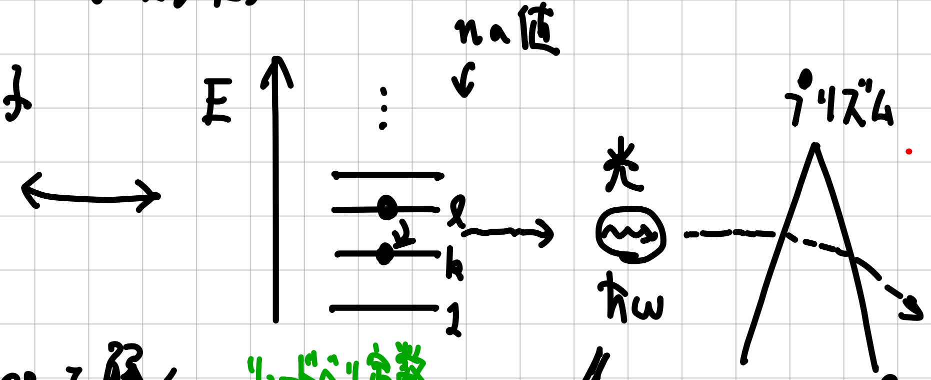
'21 11/15

例4.4 水素原子のBohr模型(1913年)

「定常状態」

角運動量 $= n\hbar$ ⇒ 半径 ⇒ エネルギー準位
(の量子化)





〈今日〉

水素原子のSchrödinger eq.を解く

リュードベリ定数

$$\underbrace{Rch}_{\parallel}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{l^2}\right)$$

固有の波長(振動数)をもつ光

$$H\varphi_n = E_n\varphi_n$$ これを求める

$$E_n = -C\frac{1}{n^2} \quad \longleftrightarrow \quad 13.6\,\mathrm{eV}$$

一致するか?

$(1\,\mathrm{eV} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J})$

$(m \simeq \mu)$

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Bohr半径

$$\varepsilon := \frac{2ma_0^2}{\hbar^2}E, \quad \rho := \frac{r}{a_0} \text{ とおく.} \quad \left(a_0 := 4\pi\varepsilon_0\frac{\hbar^2}{me^2}\right)$$

宿題1 a_0の値を単位付きで有効数字2ケタで求めよ.

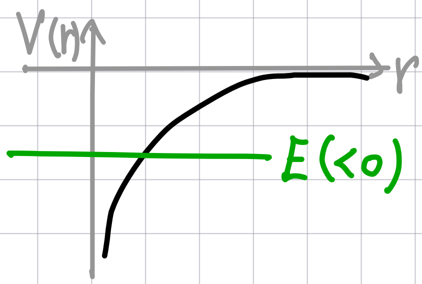
m : 電子の質量
e : 〃 電荷
ε_0 : 真空の誘電率
$\hbar$: プランク定数 (2πで割ったもの)

①を解く(来週) ⇝ $\lambda = l(l+1)$ $\quad l\in\{0,1,2,\cdots\}$

今日は②を解く。$R(r) = R_l(r)$ と書き、$u_l := \rho R_l$ とおくと.

$$(\text{Sch eq.})\quad \underbrace{\left[-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{l(l+1)}{\rho^2}-\frac{2}{\rho}\right]}_{\substack{\parallel \\ H_l}} u_l(\rho) = \varepsilon\, u_l(\rho)$$

$\varepsilon < 0$



以後 [砂川] P120 に沿う

"昇降 ops." を導入：

$$\begin{cases} b_{l+k} := \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{d\rho} + i\left(\dfrac{l+k}{\rho} - \dfrac{1}{l+k}\right) \\[2ex] b_{l+k}^{\dagger} = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{d\rho} - i\left(\dfrac{l+k}{\rho} - \dfrac{1}{l+k}\right) \end{cases} \qquad k \in \{1, 2, \cdots\}$$

このとき、$H^{(k)} := -\dfrac{d^2}{d\rho^2} + \dfrac{(l+k-1)(l+k)}{\rho^2} - \dfrac{2}{\rho}$, $\varepsilon^{(l+k)} := -\dfrac{1}{(l+k)^2}$ として

$$\begin{cases} b_{l+k}^{\dagger} b_{l+k} = H^{(k)} - \varepsilon^{(l+k)} \\[1ex] b_{l+k} b_{l+k}^{\dagger} = H^{(k+1)} - \varepsilon^{(l+k)} \end{cases} \quad \cdots (\bigstar)$$

$H^{(1)} \equiv H_l$ (もともとのH)

また $H^{(k)} b_{l+k}^{\dagger} = b_{l+k}^{\dagger} H^{(k+1)}$ が成り立つ.

∵ (左辺) $= \left(b_{l+k}^{\dagger} b_{l+k} + \varepsilon^{(l+k)}\right) b_{l+k}^{\dagger} = b_{l+k}^{\dagger} b_{l+k} b_{l+k}^{\dagger} + \varepsilon^{(l+k)} b_{l+k}^{\dagger}$

$= b_{l+k}^{\dagger}\left(b_{l+k} b_{l+k}^{\dagger} + \varepsilon^{(l+k)}\right) =$ (右辺) ∎

ここで、$b_{l+k}\,\varphi^{(l+k-1)} = 0 \quad \cdots (\ast\ast)$ をみたす関数を考える.

これは $H^{(k)}$ の最低固有値を与え、その固有値は $\varepsilon^{(l+k)}$.

∵ $H^{(k)} \varphi^{(l+k-1)} = \left(b_{l+k}^{\dagger} b_{l+k} + \varepsilon^{(l+k)}\right)\varphi^{(l+k-1)} = \varepsilon^{(l+k)} \varphi^{(l+k-1)}$.

また、$H^{(k)}$ の $\varphi^{(l+k-1)}$ 以外の固有関数を $\chi^{(l+k-1)}$ (規格化済) と書くと

$$\int_0^\infty \chi^{\dagger(l+k-1)} H^{(k)} \chi^{(l+k-1)} d\rho = \underbrace{\int_0^\infty \big|\underbrace{b_{l+k}\,\chi}_{\neq 0}\big|^2 d\rho}_{>0 \text{ (1次元では縮退がない)}} + \varepsilon^{(l+k)}$$

$$> \varepsilon^{(l+k)}$$

∎

$H^{(1)} \equiv H_\ell$ の固有関数を拾い出す

$b_{\ell+1}^\dagger b_{\ell+1} + \varepsilon^{(\ell+1)}$　　$b_{\ell+1}\varphi^{(\ell)} = 0$

$\underline{k=1}$　$u_{\ell+1} := \varphi^{(\ell)}$ は $H^{(1)}$ の固有値 $\varepsilon^{(\ell+1)}$ の解　∵ $H^{(1)}u_{\ell+1} = H^{(1)}\varphi^{(\ell)} = \varepsilon^{(\ell+1)}u_{\ell+1}$ ■

$\underline{k=2}$　$u_{\ell+2} := b_{\ell+1}^\dagger\varphi^{(\ell+1)}$　〃　$\varepsilon^{(\ell+2)}$　〃　∵ $H^{(1)}u_{\ell+2} = H^{(1)}b_{\ell+1}^\dagger\varphi^{(\ell+1)} \overset{\star}{=} b_{\ell+1}^\dagger \underbrace{H^{(2)}\varphi^{(\ell+1)}}_{\varepsilon^{(\ell+2)}\varphi^{(\ell+1)}}$ ■

⋮

$\underline{k}$　$u_{\ell+k} := \overbrace{b_{\ell+1}^\dagger b_{\ell+2}^\dagger\cdots b_{\ell+k-1}^\dagger}^{k-1\,\text{コ}}\varphi^{(\ell+k-1)}$　〃　$\varepsilon^{(\ell+k)}$　〃

(**)から決まる

∵ 宿題2　これを示せ

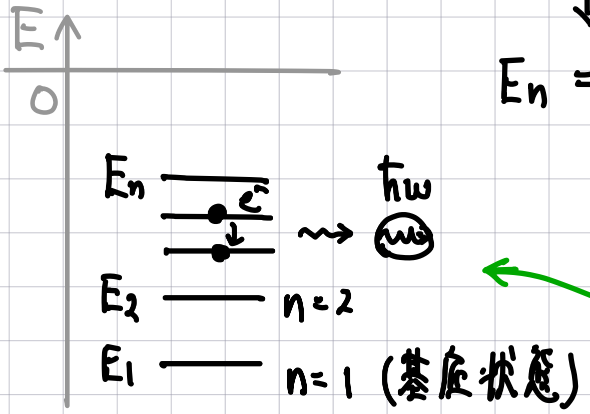
よって $n := \ell + k$ とすると $\varepsilon^{(n)} = -\dfrac{1}{n^2}$　($\ell \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$: 縮退)　$\ell = n-k$

$\Updownarrow$

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{n^2}$$

‖ 計算

13.6eV (実験と一致!)



e^- が $E_n \to E_m$ $(n>m)$ と遷移し、エネルギー $\hbar\omega$ の光を放出

波動関数 (kを用いない)

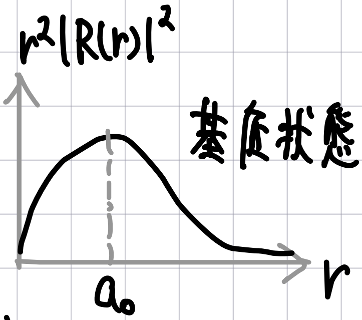
$$u_\ell^{(n)} := u_{\underbrace{\ell+k}_{n}} = \overbrace{b_{\ell+1}^\dagger \cdots b_{n-1}^\dagger}^{n-\ell-1\,\text{コ}}\varphi^{(n-1)}$$

$$(**) \Leftrightarrow \quad b_n\varphi^{(n-1)} = \left[\frac{1}{i}\frac{d}{d\rho} + i\left(\frac{n}{\rho} - \frac{1}{n}\right)\right]\varphi^{(n-1)} = 0$$

解 : $\varphi^{(n-1)}(\rho) = C_n \rho^n e^{-\frac{\rho}{n}}$　(C_n : 規格化因子)

$k = n - \ell \geq 1$

$n=1$ ($\ell=0$のみ)　$\underset{k=1}{u_0^{(1)}} = \varphi^{(0)} = 2\rho e^{-\rho}$ →



$n=2$ ($\ell=0,1$)　$\underset{k=2}{u_0^{(2)}} = b_1^\dagger\varphi^{(1)} \xleftarrow{b_1^\dagger} \underset{k=1}{u_1^{(2)}} = \varphi^{(1)}$

$n=3$ ($\ell=0,1,2$)　$\underset{k=3}{u_0^{(3)}} = b_1^\dagger b_2^\dagger\varphi^{(2)} \xleftarrow{b_1^\dagger} \underset{k=2}{u_1^{(3)}} = b_2^\dagger\varphi^{(2)} \xleftarrow{b_2^\dagger} \underset{k=1}{u_2^{(3)}} = \varphi^{(2)}$

4.5 (一般)角運動量の固有値問題

定義4.5 $\mathcal{H}$上のエルミートops. $\hat{J}_k$ $(k\in\{1,2,3\})$ が以下をみたすとき、(一般)角運動量op.であるという。　(例)軌道角運動量op.(P17)

$$[\hat{J}_j,\hat{J}_k] = i\epsilon_{jkl}\hat{J}_l$$

lについての和

命題4.6 $\hat{\vec{J}}^2 := \sum_{k=1}^{3}\hat{J}_k^2$ とすると、$[\hat{\vec{J}}^2,\hat{J}_k]=0\ (\forall k)$

注4.7 $[\hat{\vec{J}}^2,\hat{J}_3]=0 \Rightarrow \hat{\vec{J}}^2$ と $\hat{J}_3$ の同時固有状態 $|\lambda, m\rangle$ が存在

今は書かない

$\hat{\vec{J}}^2$の固有値のラベル

$\hat{J}_3$

λ,を省略

$$\begin{cases}\hat{\vec{J}}^2|m\rangle=\lambda|m\rangle & \cdots ③\\ \hat{J}_3|m\rangle = m|m\rangle & \cdots ④\end{cases}\quad (\langle m|m\rangle = 1 とする)$$

これを解く

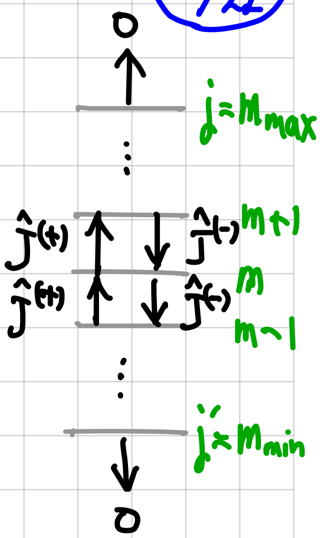
'21 11/22

③より $\lambda = \langle m|\hat{\vec{J}}^2|m\rangle = \sum_{k=1}^{3}\left|\hat{J}_k|m\rangle\right|^2 \geq 0$

昇降ops.をdef:

$$\hat{J}^{(\pm)} := \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2 \quad (以後複号同順)$$

このとき
$$\begin{cases}[\hat{\vec{J}}^2,\hat{J}^{(\pm)}]=0 & \cdots ⑤\\ \hat{J}_3\hat{J}^{(\pm)} = \hat{J}^{(\pm)}(\hat{J}_3\pm 1) & \cdots ⑥\\ \hat{J}^{(\pm)}\hat{J}^{(\mp)} = \hat{\vec{J}}^2-\hat{J}_3^2\pm\hat{J}_3 & \cdots ⑦\end{cases}$$



補題4.8 $\hat{J}^{(\pm)}|m\rangle$ は $\hat{J}_3$ の固有ベクトルで固有値は $(m\pm1)$

宿題1
⑦を示せ
複号のどちらか一方だけでよい

$\because\ \hat{J}_3\hat{J}^{(\pm)}|m\rangle \overset{⑥}{=} \hat{J}^{(\pm)}(\hat{J}_3\pm1)|\overset{m}{m}\rangle = (m\pm1)\hat{J}^{(\pm)}|m\rangle$ ▨

命題4.9 $\hat{J}_3$の固有値mには最大値・最小値がある。

また $j:=m_{max}$ として $m=\underbrace{j, j-1, \cdots, -j}_{(2j+1)コ}$ であり、$\lambda = j(j+1)$

∵ $(\hat{J}_1^2+\hat{J}_2^2)|m\rangle = (\hat{\vec{J}}^2-\hat{J}_3^2)|m\rangle = (\lambda-m^2)|m\rangle$

$\therefore \langle m|(\quad \text{〃} \quad)|m\rangle = \lambda - m^2 \geqq 0 \quad \therefore$ mに最大・最小あり。

$j := m_{max},\ j' := m_{min}$ とする： $\hat{J}^{(+)}|m=j\rangle = 0,\ \hat{J}^{(-)}|m=j'\rangle = 0$

$\therefore \quad \hat{J}^{(-)}\hat{J}^{(+)}|m=j\rangle \overset{⑦}{=} (\hat{\vec{J}}^2-\hat{J}_3^2-\hat{J}_3)|m=j\rangle = (\lambda-j^2-j)|m=j\rangle = 0$

$\quad \hat{J}^{(+)}\hat{J}^{(-)}|m=j'\rangle \overset{〃}{=} (\hat{\vec{J}}^2-\hat{J}_3^2+\hat{J}_3)|m=j'\rangle = (\lambda-j'^2+j')|m=j'\rangle = 0$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = j(j+1) \\ \lambda = j'(j'-1) \end{cases} \Rightarrow (j+j')\overbrace{(j-j'+1)}^{>0\ (∵\ j\geqq j')} = 0 \Rightarrow j' = -j \quad ▨$$

系4.10 $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots\}$ ∵ 固有値の間隔の数 $= 2j \in \mathbb{Z}$

(例) $j=0$ のとき $m=0,\ \lambda=0$

$j=\frac{1}{2}$ 〃 $m\in\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\},\ \lambda=\frac{3}{4}$

$j=1$ 〃 $m\in\{1,0,-1\},\ \lambda=2$

位相因子 = 1 とした

補題4.11 $\hat{J}^{(\pm)}|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j,m\pm1\rangle$

|m⟩を改めてこう書いた

∵ 補題4.8より、$\hat{J}^{(\pm)}|m\rangle = a_m^{(\pm)}|m\pm1\rangle$ と書ける。

$\langle m-1|\hat{J}^{(-)}|m\rangle = a_m^{(-)}\langle m-1|m-1\rangle = a_m^{(-)}$

$\qquad \shortparallel$

$(\hat{J}^{(+)}|m-1\rangle)^\dagger|m\rangle = \overline{a_{m-1}^{(+)}}\langle m|m\rangle = \overline{a_{m-1}^{(+)}}$

一方、$\langle m|\hat{J}^{(-)}\hat{J}^{(+)}|m\rangle = |\hat{J}^{(+)}|m\rangle|^2 = |a_m^{(+)}|^2$

$\qquad \shortparallel$

$\langle m|(\hat{\vec{J}}^2-\hat{J}_3^2-\hat{J}_3)|m\rangle = j(j+1)-m(m+1) = (j-m)(j+m+1)$ ▨

4.6 軌道角運動量の固有値問題

4.3節に戻る. $\hat{\vec{L}} =: \hbar \hat{\vec{M}}$ とすれば, $\hat{\vec{M}}$ は一般角運動量op.の一例.

$$\begin{cases} M_x = \frac{1}{i}\left(-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ M_y = \frac{1}{i}\left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ M_z = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \quad \cdots ⑦ \end{cases}$$

$\cot x := \frac{1}{\tan x}$

$\vec{M}^2 Y(\theta,\phi) = \lambda Y(\theta,\phi)$ を解く. (λ, Y を求める)

$$M^{(\pm)} := M_x \pm i M_y \underset{\substack{\xi := \cos\theta \\ (0 \leq \theta \leq \pi)}}{=} e^{\pm i\phi}\left(\mp\sqrt{1-\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$(\sin\theta = \sqrt{1-\xi^2})$

$$\vec{M}^2 = -\frac{\partial}{\partial\xi}(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$Y_m(\theta,\phi) := \langle \xi, \phi | m \rangle$ とすると. ← ③, ④ のもの

④ & ⑦

$$M^{(\pm)} Y_m = e^{\pm i\phi}\left(\mp\sqrt{1-\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{m\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) Y_m$$

$$= \mp e^{\pm i\phi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{\pm m+1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{\mp m} Y_m$$

$j = m_{max}$ を l と書く

宿題2

ξ によらない

$$M^{(+)} Y_l = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{-l} Y_l = \text{const.} \quad \cdots ⑧$$

これを示せ (e.g. 帰納法)

一方. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$(M^{(-)})^n Y_m = e^{-in\phi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{-m+n}\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}\left(\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^m Y_m\right) \quad \cdots ⑨$$

↓ $m = l,\ n = 2l+1$

$$(M^{(-)})^{2l+1} Y_l = e^{-i(2l+1)\phi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{l+1}\frac{\partial^{2l+1}}{\partial\xi^{2l+1}}\left(\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^l Y_l\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^{2\ell+1}}{\partial \xi^{2\ell+1}} \left\{ \underbrace{\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{\ell} Y_\ell}_{\shortparallel} \right\} = 0$$

$\therefore$ ξの2ℓ次の多項式 … ⑩

jと違って $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots$ はない

⑩ ÷ ⑧ $\Rightarrow$ $(1-\xi^2)^{\ell} =$ (ξの2ℓ次の多項式) $\Rightarrow \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

〈波動関数〉

$$\vec{M}^2 \underbrace{Y_m(\theta, \phi)}_{F_m(\xi)\, e^{im\phi}} = \ell(\ell+1) Y_m(\theta, \phi) \quad \leftarrow ①$$

$\downarrow$ $F_m(\xi)\, e^{im\phi}$: 変数分離(可能)

$$\left(\frac{d}{d\xi} (1-\xi^2) \frac{d}{d\xi} - \frac{m^2}{1-\xi^2} + \ell(\ell+1) \right) F_m(\xi) = 0$$: ルジャンドル陪微分方程式

⑧: $$Y_{\ell,\ell} = a_\ell \left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{\ell} e^{i\ell\phi} = \underbrace{a_\ell}_{\shortparallel} \sin^\ell\theta\, e^{i\ell\phi} \quad \cdots ⑪$$

$$a_\ell = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}}$$ 規格化(P18) $\leftarrow$ $$\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^\ell d\xi = \frac{2^{2\ell+1}(\ell!)^2}{(2\ell+1)!}$$

$\downarrow (M^{(-)})^{\ell-m}$

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \overset{4.11}{=} \frac{1}{\sqrt{(\ell+m+1)(\ell-m)}} M^{(-)} Y_{\ell,m+1} = \cdots$$

$$= \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!\,(2\ell)!}} (M^{(-)})^{\ell-m} Y_{\ell,\ell}$$

$$\underset{\&\ ⑪}{\overset{⑨: n=\ell-m,\ m=\ell}{=}} \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(\ell+m)!\,(2\ell+1)}{4\pi(\ell-m)!}} \frac{e^{im\phi}}{\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^m} \frac{d^{\ell-m}}{d\xi^{\ell-m}} (1-\xi^2)^\ell$$

球面調和関数 ($\fallingdotseq$ $e^{im\phi}$を除けば ルジャンドル陪関数)

(SO(3)の既約表現のbasis)

〈水素原子まとめ〉

束縛状態 $\varphi_{n,l,m}(\vec{r}) = R_n(r)\, Y_{l,m}(\theta, \phi)$

$$\varphi_{n,l,m}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | n, l, m \rangle$$

n: 主量子数 (エネルギー準位のラベル) $\in \{1, 2, \cdots\}$

l: 方位 〃 $\in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ nコ

m: 磁気 〃 $\in \{-l, \cdots, l\}$ $(2l+1)$コ

n-th 励起状態に入りうる電子数 $= \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) \times \underbrace{2}_{\text{電子の↑↓の自由度 (スピン)}} = 2n^2$

2 K殻

8 L 〃

18 M 〃

⋮

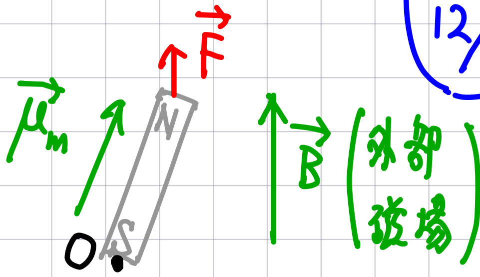
(cf. 魔法数)

4.7 スピン角運動量

'21 12/6

スピン自由度 = 粒子の「自転」に相当する粒子固有の自由度

cf. 磁石の磁気モーメント $\vec{\mu}_m$



ポテンシャルエネルギー

$$V_m = -\vec{\mu}_m \cdot \vec{B}$$

Pauli : $\vec{\mu}_m \propto \hbar \vec{J} =: \vec{S}$ と考えた。(磁性の起源)

一般角運動量 ($j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ も含む)

電子では $\vec{\mu}_m = \frac{e}{2m}\left(\vec{L} + g\vec{S}\right)$　$g \fallingdotseq 2$ (g因子) ← 起源は相対論的考察が必要

⟶ 磁場中の電子のふるまいを説明 (Zeeman効果など)

状態空間は拡張される:

$$\hat{H}_0, \vec{L} \qquad \vec{S}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_S$$

これだけに着目すれば有限次元 (これを調べよう)

(これまでの状態空間) ⊗ (スピンop.の作用する空間)

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$|n, \ell, m'\rangle \otimes |j, m\rangle$$

違うエム ($m' \in \{-\ell, -\ell+1, \cdots, \ell\}$)

〈4.5節のまとめ〉

$$[\hat{J}_j, \hat{J}_k] \overset{4.5}{=} i\epsilon_{jkl}\hat{J}_l, \quad [\hat{\vec{J}}^2, J_k] \overset{4.6}{=} 0,$$

$$\hat{\vec{J}}^2 |j, m\rangle \underset{4.9}{\overset{③}{=}} j(j+1)|j, m\rangle, \quad \hat{J}_3 |j, m\rangle \overset{④}{=} m|j, m\rangle,$$

$$\underbrace{\hat{J}^{(\pm)}}_{\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2} |j, m\rangle \overset{4.11}{=} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, |j, m \pm 1\rangle \qquad m \in \underbrace{\{-j, -j+1, \cdots, j\}}_{(2j+1)\text{コ}}$$

以下すべて複号同順

例4.12 スピン$\frac{1}{2}$ $(j=\frac{1}{2})$ $\hat{\vec{S}}=\hbar\hat{\vec{J}}$

$m=-\frac{1}{2}$ or $\frac{1}{2}$ (2準位系) $\Rightarrow$ $|\pm\rangle := |j=\frac{1}{2}, m=\pm\frac{1}{2}\rangle$

この基底による$\hat{\vec{J}}$の行列表示：

$$\left(\hat{J}_z|+\rangle, \hat{J}_z|-\rangle\right) = \left(|+\rangle, |-\rangle\right) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{J_z\text{（スピン表示）}}$$

$$J_z = \begin{pmatrix} \langle +|\hat{J}_z|+\rangle & \langle +|\hat{J}_z|-\rangle \\ \langle -|\hat{J}_z|+\rangle & \langle -|\hat{J}_z|-\rangle \end{pmatrix}$$ とも書ける

同様に $\hat{J}_x = (1/2)(\hat{J}^{(+)} + \hat{J}^{(-)})$ 等より

$$J_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

宿題1 $\hat{J}_y$のスピン表示を求めよ.（$\hat{J}^{(+)}, \hat{J}^{(-)}$との関係を求めるとよい）

$$\vec{J}^2 = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(|+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

定義4.13 以下をPauli（のスピン）行列という

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

命題4.14

(i) $\sigma_k^2 = 0 \quad (^\forall k)$

(ii) $\sigma_j\sigma_k = i\epsilon_{jkl}\sigma_l \Rightarrow [\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$

(iii) $\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 0 \quad (^\forall k \neq j)$

$S^2 \simeq \mathbb{C}P_1$

注4.15 $\mathcal{H}_s$の元 $= |\psi_s\rangle = |+\rangle\overbrace{\langle +|\psi_s\rangle}^{C_+} + |-\rangle\overbrace{\langle -|\psi_s\rangle}^{C_-}$

法則1より、連比$[C_+ : C_-]$が状態を定める

スピン軌道相互作用

水素原子内の電子の(スピンを考慮した)ハミルトニアン:

相対論的考察から決まる

$$H = H_0 + f(r)\, \underbrace{\vec{L}\cdot\vec{S}}_{\sum_k L_k \otimes S_k} \quad \cdots ⑫$$

正確には $H_0 \otimes 1_s$, $\vec{L}\cdot\vec{S} = \sum_k L_k \otimes S_k$

$\vec{S} \propto \vec{\mu}_m$, $\vec{L} \propto \vec{B}$ "電子から見ると陽子が $\vec{L}$ を持ち $\vec{B}$ を生じる"

命題4.16 ⑫において, $\vec{L}+\vec{S}$ は保存量
($\vec{L}, \vec{S}$ それぞれは保存しない)

☺ $\vec{L}+\vec{S} = \vec{L}\otimes 1_s + 1_0 \otimes \vec{S}$ に注意. ※ $L_k \otimes S_k \cdot L_l \otimes 1_s = L_k L_l \otimes S_k 1_s$

$[H_0, \vec{L}] = 0$, $[H_0, \vec{S}] = 0$ はOK. 一方

$$[f(r)\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{L}] = f(r)[\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{L}] = +i\hbar f(r)\vec{L}\times\vec{S} \neq \vec{0}$$

$$[f(r)\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{S}] = f(r)[\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{S}] = -i\hbar f(r)\vec{L}\times\vec{S} \quad 〃$$

$$\therefore [f(r)\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{L}+\vec{S}] = 0 \Rightarrow [H, \vec{L}+\vec{S}] = 0$$

$$([\quad 〃 \quad, \vec{L} \text{ or } \vec{S}] \neq 0 \Rightarrow [H, \vec{L} \text{ or } \vec{S}] \neq 0) \quad ▨$$

宿題2 これを示せ
(テンソル積⊗を書いて正確に計算
1つの成分だけでよい)

⑫に対するSch. eq. (位置・スピン表示)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi(\vec{r},+)\\ \psi(\vec{r},-)\end{pmatrix} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_c(r)\right)\begin{pmatrix}\psi(\vec{r},+)\\ \psi(\vec{r},-)\end{pmatrix}$$
$$+ \frac{\hbar}{2}f(r)\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}L_x + \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}L_y + \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}L_z\right]\begin{pmatrix}\psi(\vec{r},+)\\ \psi(\vec{r},-)\end{pmatrix}$$

⇝ 微細構造分裂を説明: $l \neq 0$ エネルギー準位の分裂

4.8 水素原子のSO(4)対称性

Pauliによる解法(1926年) (詳しくはレポート)

4.4節の議論に戻る($E<0$):

カッパ

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + V(r), \quad V(r) = -\frac{\kappa}{r} \quad \left(\kappa := \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)$$

以下のop.を導入:

$$\vec{A} := \frac{1}{2m}(\vec{L}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{L}) + \kappa\frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{A}$は保存量($[H,\vec{A}]=0$)であり、Runge-Lenz-Pauliベクトルという

$$\vec{A}^2 = \frac{2}{m}(\vec{L}^2+\hbar^2)H + \kappa^2 = \frac{2E}{m}(\vec{L}^2+\hbar^2) + \kappa^2 \quad \cdots ⑬$$

<u>命題4.17</u> $\vec{K} := \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\,\vec{A}$ とすると

固有状態に作用していると思い $\hat{H}\to E$ とした(以下同様)

以下の交換関係式が得られる:

$$[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l, \quad [K_j, K_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l$$

$$[L_j, K_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}K_l$$

($\underbrace{\{L_j, K_l\}}_{6つ}$はSO(4)のLie環の生成子となす)

<u>命題4.18</u> $\vec{S}^{\pm} := \frac{1}{2}(\vec{L}\pm\vec{K})$ とすると

$$[S^{\pm}_j, S^{\pm}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}S^{\pm}_l, \quad [S^{+}_j, S^{-}_k] = 0 \leftarrow \left(\underset{6つ}{\mathfrak{so}(4)} \simeq \underset{3つ}{\mathfrak{su}(2)} \oplus \underset{3つ}{\mathfrak{su}(2)}\right)$$

2つの一般角運動量ops.!

$(\vec{S}^{\pm})^2 = \frac{1}{4}(\vec{L}^2+\vec{K}^2)$ より、±どちらの場合も固有値は $s(s+1)\hbar^2$

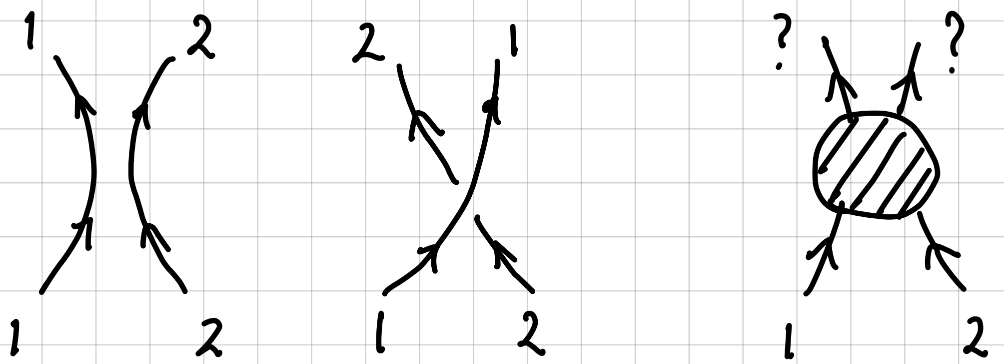
$$s(s+1)\hbar^2 \overset{⑬}{=} \frac{1}{4}\left(-\hbar^2 + \frac{m\kappa^2}{2|E|}\right) \qquad \therefore E = -\frac{m\kappa^2}{2\hbar^2 n^2} \quad \left(n := 2s+1 \in \{1,2,\cdots\}\right)$$

§5 ボゾンとフェルミオン

5.1 同種粒子

<u>定義5.1</u> 2個の粒子が同種粒子である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ それらの質量・スピン・電荷などの粒子固有の物理量が同じである

<u>仮説5.2</u> 量子論では同種粒子は識別できない



古典論 (それぞれの軌道を追跡可能)

量子論 (確率解釈→追跡不可能)

N個の同種粒子からなるシステムを考える:

$$\psi(q_1, q_2, \cdots, q_N; t) \qquad q_k := (\vec{r}_k, m_k)$$

スピンのz成分 (+ or − など)

位置・スピン表示

2粒子の入れ替えop. (Hと可換)

$$P_{kl}\psi(\cdots q_k \cdots q_l \cdots; t) := \psi(\cdots q_l \cdots q_k \cdots; t)$$

$$\overset{5.2}{=} c_{kl}\psi(\cdots q_k \cdots q_l \cdots; t)$$

定数

$$P_{kl}^2 = id \Rightarrow c_{kl}^2 = 1 \Rightarrow c_{kl} = \pm 1$$

<u>定義5.3</u> $\forall k, l$ に対して, $c_{kl} = +1$ (対称) ⇒ Bose粒子(ボゾン) という

$= -1$ (反対称) ⇒ Fermi粒子(フェルミオン)

注5.4 実は

ボゾン ⇔ スピン 0 or 1 or 2 (整数)

フェルミオン ⇔ 〃 $\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$ (半整数)

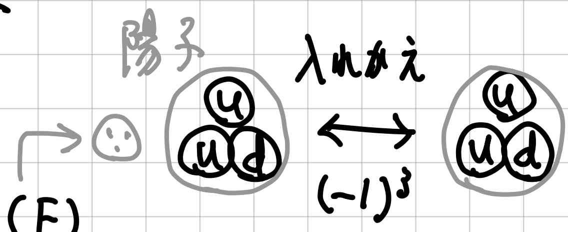
例5.5 素粒子

(B) スピン0 : Higgs 粒子

(F) スピン$\frac{1}{2}$: クォーク, 反クォーク, レプトン(電子e^-, ミューオン, ニュートリノ, …)
$u, d, \cdots$ $\bar{u}, \bar{d}, \cdots$ 反レプトン(陽電子e^+, …)

(B) { スピン1 : 光子, W・Zボゾン, グルーオン
　　 スピン2 : 重力子

例5.6 複合粒子



陽子 $p = uud$: (F)

中性子 $n = udd$: (F)

4ヘリウム $^4He = \overbrace{ppnn}^{4コ} + 2e^-$: (B)

3ヘリウム $^3He = \overbrace{ppn}^{3コ} + 2e^-$: (F)

電荷
u : アップクォーク $(+\frac{2}{3})$
d : ダウン 〃 $(-\frac{1}{3})$

宿題1 重水素原子^2Hおよび パイ中間子πは ボゾンかフェルミオンか? (構成要素を記載すること)

命題5.7 N個のボゾン, フェルミオンの波動関数は以下のようにそれぞれ対称関数, 反対称関数で記述される:

← Sch. eqの解

$$\psi_B(q_1, \cdots, q_N; t) = \frac{C_B}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \psi(q_{\sigma(1)}, \cdots, q_{\sigma(N)}; t)$$

レポート?

$$\psi_F(\quad 〃 \quad) = \frac{C_F}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \psi(q_{\sigma(1)}, \cdots, q_{\sigma(N)}; t)$$

5.2 独立粒子近似

N粒子間の相互作用を無視する近似で定常状態を考える。

$$H\varphi = \sum_{k=1}^{N}\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_k + V(q_i)\right)}_{H_k\ (=1\otimes\cdots\otimes H_k\otimes\cdots\otimes 1)}\varphi = E\varphi \quad \cdots (*)$$

共通

k番目

それぞれの粒子：

$$H_k\varphi_{n_k}(q_k) = E_{n_k}\varphi_{n_k}(q_k) \qquad k\in\{1,\cdots,N\}$$

$\Downarrow$ 量子数を1種類のラベルで表記

$\hat{q}_1, \hat{p}_1$ 　 $\hat{q}_N, \hat{p}_N$

$\mathcal{H}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}$

正確には $\otimes$

(*)の解 $\varphi_{n_1\cdots n_N}(q_1,\cdots,q_N) = \varphi_{n_1}(q_1)\cdot\varphi_{n_2}(q_2)\cdots\cdot\varphi_{n_N}(q_N)$

$E = E_{n_1}+\cdots+E_{n_N}$

宿題2 $N=3$の場合の$\varphi^{(B)}$を書き下し、$q_1\leftrightarrow q_2$の入れかえで不変であることを確認せよ

<u>命題5.8</u> 以上の設定にて

$\mathrm{Sym}_N(\mathcal{H})$：対称代数

$$\varphi^{(B)}_{n_1\cdots n_N}(q_1,\cdots,q_N) = \frac{C_B}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\varphi_{n_1}(q_{\sigma(1)})\cdots\varphi_{n_N}(q_{\sigma(N)})$$

$\bigwedge^N(\mathcal{H})$：外積代数

$$\varphi^{(F)}_{n_1\cdots n_N}(q_1,\cdots,q_N) = \frac{C_F}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\varphi_{n_1}(q_{\sigma(1)})\cdots\varphi_{n_N}(q_{\sigma(N)})$$

$$\overset{\text{規格化}}{=}\frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix}\varphi_{n_1}(q_1) & \varphi_{n_1}(q_2) & \cdots & \varphi_{n_1}(q_N)\\ \varphi_{n_2}(q_1) & \varphi_{n_2}(q_2) & \cdots & \varphi_{n_2}(q_N)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n_N}(q_1) & \varphi_{n_N}(q_2) & \cdots & \varphi_{n_N}(q_N)\end{vmatrix} \text{：Slater行列式}$$

☺ レポート

$n_k = n_l$ $\Downarrow$ 行列式 $= 0$

<u>注5.9</u>

(i) フェルミオンは同一状態に2個以上入れない（Pauliの排他律）

(ii) ボゾンは　〃　いくらでも入れる

cf. ボーズ・アインシュタイン凝縮(BEC) ⇝ 超伝導（eのクーパー対）など低温物理の理解の鍵

§6 特殊相対性理論

このsectionは再び古典論（力学 & 電磁気学）

6.1 電磁場の古典論

4次元時空 $(t, \vec{x})$ を考える
　　　　時間　空間

法則 6.1（「真空中の」マクスウェルの方程式）[ガウス単位系]　← 電荷・電流の源以外、物質がない（真空）

電場 $\vec{E}(t,\vec{x})$ と 磁場 $\vec{B}(t,\vec{x})$ に関する基本法則
「磁束密度」in [SI単位系]

$$
(M)\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho & \cdots ① \\
\nabla\cdot\vec{B} = 0 & \cdots ② \\
\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \cdots ③ \\
\nabla\times\vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \cdots ④
\end{cases}
$$

$\rho(t,\vec{x})$: 電荷密度

$\vec{j}(t,\vec{x})$: 電流密度

$c \fallingdotseq 3.0\times10^8\,\mathrm{m/s}$（光速度）$= \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

注 6.2
- 物質中ではもう少し複雑
- $\vec{E}$ と $\vec{B}$ は対称的（$\rho=0, \vec{j}=\vec{0}$: $\vec{E}\to-\vec{B}$, $\vec{B}\to\vec{E}$ で (M) 不変）
- 単位系を変えると係数・呼び名が変わる（[SI単位系]など）

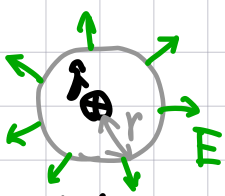
命題 6.3

$$
\begin{cases}
② : \nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow {}^{\exists}\vec{A}(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\
③ : \nabla\times\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow {}^{\exists}\phi(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}
\end{cases}
$$

∵ ポアンカレの補題（ただし領域の単連結性は仮定）∎

注 6.4（物理的意味）

①: ガウスの法則　$E = k\dfrac{q}{r^2}$



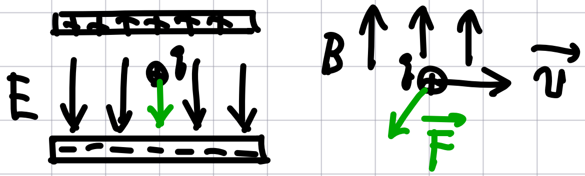
②: モノポール（N極 or S極のみ）の非存在

③: ファラデーの電磁誘導の法則 etc.

④: ビオ・サバールの法則 etc.

法則6.5 (荷電粒子 q が背景電磁場から受ける力)

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) \quad \cdots ⑤ \qquad \text{ローレンツ力}$$



6.2 方程式の対称性(方程式を不変に保つ座標変換)

(N) ニュートンの運動方程式 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ ←tビブン

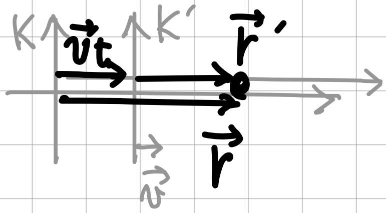
Galilei Boost (G.B.)

定義6.6 (ガリレイ変換) := (3次元回転)⑥ + (ガリレイ・ブースト)⑦ + (平行移動)⑧

$\vec{r}\,' = R(\theta)\vec{r}$ ⑥　　$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \ (\text{絶対時間}) \end{cases}$ ⑦　　$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{a}$ ⑧

広義には(3次元直交変換)
回転&折り返し

直観的な慣性系間の座標変換



定理6.7 ガリレイ変換の下、m が不変で、

$\vec{F}$ が⑦・⑧で不変&⑥で $\vec{r}$ と同じ変換性をもつ ⇒ (N)は不変

∵ G.B.: $\ddot{\vec{r}}\,' = \ddot{\vec{r}}$,　回転: $m\ddot{\vec{r}}\,' - \vec{F}' = R(\theta)(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}) = \vec{0}$ ∎

命題6.8 ガリレイ変換全体は群をなす(ガリレイ変換群)

(M) マクスウェルの方程式(少し特別な状況で考察)

命題6.9 $\rho = 0,\ \vec{j} = \vec{0}$ のとき、$\vec{E}$ と $\vec{B}$ は波動方程式をみたす

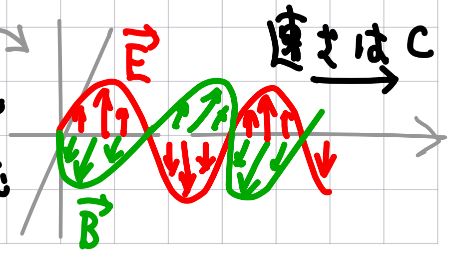
(W) $(-\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)\vec{E} = \vec{0}$　　この解を電磁波(光)という

or $\vec{B}$

$\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$,

$x^0 := ct$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$

③: $\vec{B} \rightsquigarrow \vec{E}$ を生む
④: $\vec{E} \rightsquigarrow \vec{B}$ を生む



☺ 宿題1 これを示せ ($\vec{E}$ or $\vec{B}$ どちらか) $\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \Delta\vec{v}$ を用いてよい

簡単のため空間1次元で考える

命題6.10 1次元波動eq. $\underbrace{(\partial_0^2 - \partial_1^2)}_{= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}} f(x^0, x^1) = 0$ は以下の変換の下, 不変

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\theta & \mathrm{sh}\theta \\ \mathrm{sh}\theta & \mathrm{ch}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{ch} := \cosh$ $\mathrm{sh} := \sinh$

☺ $\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta = 1$ と連鎖律 ▨

cf. 1次元ラプラスeq. $(\partial_0^2 + \partial_1^2) f(x^0, x^1) = 0$ は以下の変換の下不変

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

☺ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 〃 ▨

定義6.11 (ローレンツ変換) = $\underbrace{(3\text{次元回転})}_{\text{広義には }(3\text{次元直交変換})}$ + (ローレンツ・ブースト)

Lorentz Boost (L.B.)

(L.B.) $$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\text{〃}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$\beta := \frac{v}{c}$, $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

注6.12

- $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\xi & -\mathrm{sh}\xi \\ -\mathrm{sh}\xi & \mathrm{ch}\xi \end{pmatrix}$ と書ける ($\mathrm{ch}\xi = \gamma$, $\mathrm{sh}\xi = \beta\gamma$, $\tanh\xi = \beta$)
- $\beta = \frac{v}{c} \to 0$ で (L.B.) $\to$ (G.B.)

宿題2 双曲線関数

$\mathrm{ch}\,\theta := \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$, $\mathrm{sh}\,\theta := \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$

について以下を証明せよ:

- $\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta = 1$
- $\mathrm{sh}(i\theta) = i\sin\theta$

定理6.13 (M) はローレンツ変換の下, 不変

☺ レポート & 後日 ▨

命題6.14 ローレンツ変換全体は群をなす

注6.15

- (W) はガリレイ変換で形が変わる
- (N) はローレンツ変換 〃

まとめ	古典力学	電磁気学
ガリレイ変換	不変	×
ローレンツ変換	×	不変

6.3 特殊相対性理論

'21 12/27

基本原理 6.16（アインシュタイン, 1905）

(I) 物理法則はどの慣性系においても同一である（特殊相対性原理）

(II) 光速はどの慣性系においても一定の値 c をとる（光速不変の原理）

定義 6.17 6.16に基づく理論を特殊相対論 or 相対論的理論という

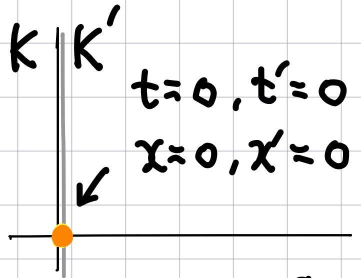
注 6.18 ・(II)の根拠：(M) & マイケルソン・モーレーの実験(1887)

・慣性系同士の座標変換はガリレイ変換ではなくローレンツ変換

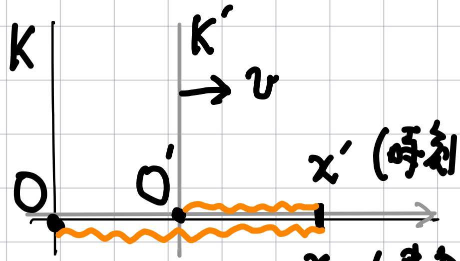
（(N)は6.16をみたすように修正される＝相対論的力学）

命題 6.19 $s^2 := -(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$ は慣性系によらない不変量

☺ K K' $t=0,\ t'=0$ $x=0,\ x'=0$ で電が発光 $(x^0 \equiv ct)$ →



(1次元で考える)



x'（時刻 t'） $(ct')^2=(x')^2$

x（時刻 t） $(ct)^2=x^2$

$$\Downarrow$$

$$-(ct')^2+x'^2 = -(ct)^2+x^2\ (=0) \quad ■$$

命題 6.20（速度の合成則：1次元）

$\Lambda(v)$：(L.B)とする. (cf. 6.11)

$\Lambda(v_1)\Lambda(v_2)=\Lambda(V)$, ただし $V = \dfrac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$

($0<v_1, v_2<c$ のとき $V<c$) 宿題1 これを示せ

☺
$$\text{LHS} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi_1 & -\mathrm{sh}\,\xi_1 \\ -\mathrm{sh}\,\xi_1 & \mathrm{ch}\,\xi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi_2 & -\mathrm{sh}\,\xi_2 \\ -\mathrm{sh}\,\xi_2 & \mathrm{ch}\,\xi_2 \end{pmatrix} \underset{\text{定理}}{\overset{\text{加法}}{=}} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\xi_1+\xi_2) & -\mathrm{sh}(\xi_1+\xi_2) \\ -\mathrm{sh}(\xi_1+\xi_2) & \mathrm{ch}(\xi_1+\xi_2) \end{pmatrix}$$

$$\tanh(\xi_1+\xi_2) = \frac{\tanh\xi_1+\tanh\xi_2}{1+\tanh\xi_1\tanh\xi_2} = \frac{\frac{v_1}{c}+\frac{v_2}{c}}{1+\frac{v_1}{c}\frac{v_2}{c}} \equiv \frac{V}{c}$$

V 合成速度 ■

$\left(\tanh\xi_i = \dfrac{v_i}{c}\right)$

宿題2 加法定理 $\mathrm{ch}(\theta_1+\theta_2)=\mathrm{ch}\theta_1\,\mathrm{ch}\theta_2+\mathrm{sh}\theta_1\,\mathrm{sh}\theta_2$ を示せ（ch. sh の定義は P36 宿題2 と同じ）

・ミンコフスキー・ダイヤグラムによる図示（1次元）

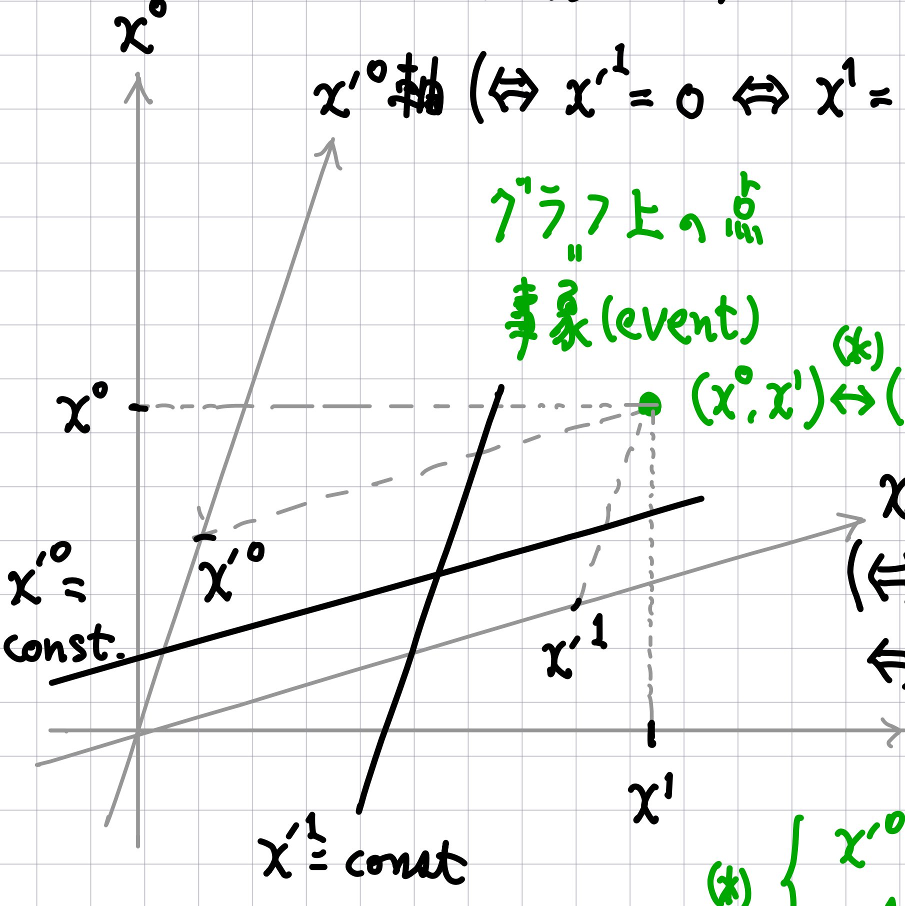
$$(\mathrm{L.B.})\quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\Lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\xi & -\mathrm{sh}\xi \\ -\mathrm{sh}\xi & \mathrm{ch}\xi \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

$\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\tanh\xi := \frac{\mathrm{sh}\xi}{\mathrm{ch}\xi} = \beta$

（$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $\gamma = 2$）
光速の約86%

x'^0軸（$\Leftrightarrow x'^1 = 0 \Leftrightarrow x^1 = \beta x^0$）



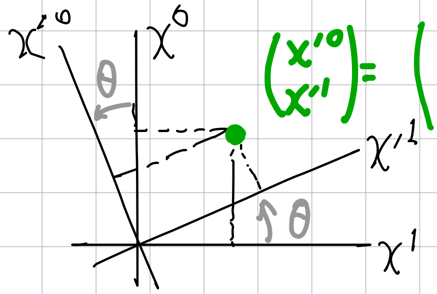
グラフ上の点
‖
事象(event)

$(x^0, x^1) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (x'^0, x'^1)$：座標値の対応関係

x'^1軸
（$\Leftrightarrow x'^0 = 0$）
$\Leftrightarrow x^0 = \beta x^1$ 傾きβの直線

$$(*)\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \end{cases}$$

cf. ユークリッド空間での
角度θの回転



$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$ ：座標値の対応関係

x'^1軸 $\Leftrightarrow x'^0 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta\cdot x^0 - \sin\theta\cdot x^1 = 0$

$\Leftrightarrow x^0 = \tan\theta\cdot x^1$

〈簡単な帰結〉

(i) 時間の遅れ

$x'^1=0$ にK'の時計があり、時刻t'を指している

$$K'\text{系}:\begin{pmatrix}x'^0\\x'^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ct'\\0\end{pmatrix}\text{とする}$$

$$\begin{cases}x'^0=\gamma(x^0-\beta x^1)\\x'^1=\gamma(-\beta x^0+x^1)\end{cases}\quad(*)$$

これをK系から見ると $\overset{''}{\Lambda}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix}\overset{ct}{\overset{\shortparallel}{x^0}}\\x^1\end{pmatrix}=\underbrace{\Lambda^{-1}}_{\begin{pmatrix}\gamma & +\beta\gamma\\+\beta\gamma & \gamma\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}ct'\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma ct'\\\beta\gamma ct'\end{pmatrix}$$

$$\therefore t=\gamma t'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}t'$$

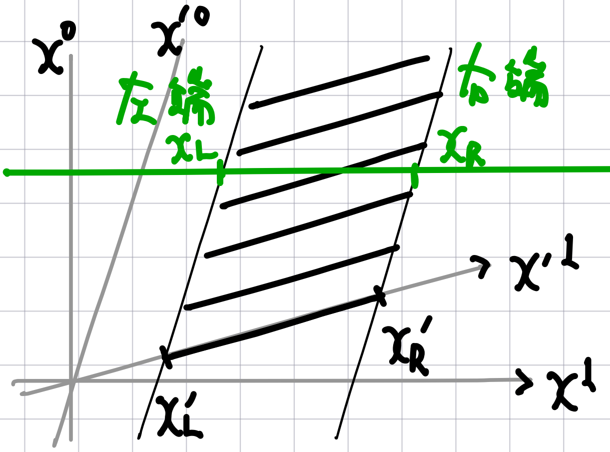
← 1より大！

例えば $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　$t'=1 \leftrightarrow t=2$

K'の"1時"は　Kの"2時"

（KからK'の時計を見ると、ゆっくり進んでいる！？）

(ii) 長さの「短縮」



あるx^0で $x^0 = x^0_L = x^0_R$

長さlの棒がK系に対して等速運動（左図）

$\Leftrightarrow x'_R-x'_L=l$

㊟ 棒の長さとは同じ時刻における両端の座標値の差

K系での棒の長さはKにおける同時刻での両端の座標値の差

$$\left.\begin{aligned}x'_R&=\gamma(-\beta x^0_R+x_R)\\x'_L&=\gamma(-\beta x^0_L+x_L)\end{aligned}\right\}\ \text{辺々引くと}\ \underbrace{x'_R-x'_L}_{l}=\gamma(x_R-x_L)\quad\therefore x_R-x_L=\frac{1}{\gamma}l$$

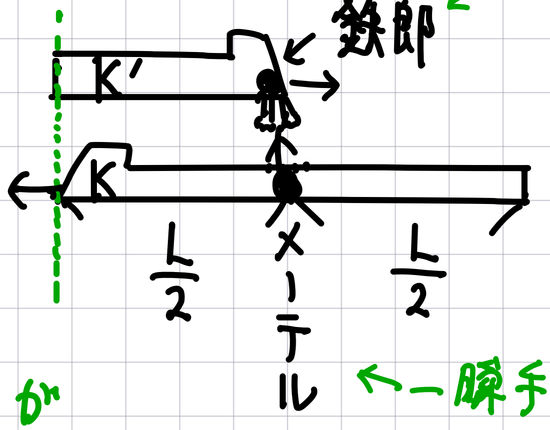
（$x^0_R = x^0_L$）

棒が「縮んだ」 ⇕ 1より小

"パラドックス"6.21（正月の暇つぶし）

同じ長さんの銀河鉄道

ずっと手を出している



相対速度 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

（ローレンツ短縮により
長さは半分）

Kの先頭が
K′の尾に一致した瞬間にメーテルからインジンを手渡す作戦（図の位置でOK!）

と・こ・ろ・が、K′から見るとKの方が縮んでいる（受けとれない？？）

6.4 物理法則の相対論的定式化

座標変換 $x' = \Lambda x$ …(※) で良いふるまいをする量をdefしたい

定義6.22 (※)の下 (行列)

$$v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu$$ (νについて和) と変換する量を反変vector (x^μと同じ変換性)

$$v'_\mu = ({}^t\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu v_\nu$$ 〃 共変vector

という } 双対

$$\left(= v_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \right)$$

行列 Λ 上つき(反変成分) 下つき(共変成分)

例6.23
$$\begin{cases} dx^\mu : \text{反変 vector} \\ \partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} : \text{共変 vector} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V \ni \text{接 vector} = X = X^\mu \partial_\mu \\ V^* \ni \text{余接 vector} = \omega = \omega_\mu dx^\mu \end{cases}$$ } 双対

X, ω が座標のとり方によらない $\Leftrightarrow \begin{cases} X^\mu : \text{反変} \\ \omega_\mu : \text{共変} \end{cases}$

∵ $(\text{共変})_\mu (\text{反変})^\mu \xmapsto{(※)} (\text{共変})_\nu \underbrace{(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho}_{= \delta^\nu{}_\rho} (\text{反変})^\rho = (\text{共変})_\mu (\text{反変})^\mu$ ∎

〈VとV^*の関係をVの内積を用いて議論〉

まず $V = (\mathbb{R}^n, \langle \mid \rangle)$ とする (標準内積 (⇔ユークリッド空間))

$V \ni x = e_i x^i$ (基底 成分)

$(\cdots\cdots)\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$g_{ij} := \langle e_i | e_j \rangle$ を計量(metric)と呼ぶ (対称 $(g_{ij} = g_{ji})$)

・双対空間 $V^\dagger$ を $V^\dagger := \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$ として構成

V上の一次形式(線形写像V→R)

$V^\dagger$の基底 f^i を $f^i(e_k)=\delta^i{}_k$ で定めたい

$$f^i(e_k) := \langle (g^{-1})^{ij} e_j | e_k \rangle = (g^{-1})^{ij} \underbrace{\langle e_j | e_k \rangle}_{g_{jk}} = \delta^i{}_k \text{ でOK}$$

Fact $V^\dagger = \langle \underbrace{f^1,\cdots,f^n}_{\text{双対基底}} \rangle_{\mathbb{R}}$, $(V^\dagger)^\dagger \simeq V$

$$\underset{V^\dagger\text{の内積}}{\langle f^i | f^j \rangle} := \langle (g^{-1})^{ik} e_k | (g^{-1})^{jl} e_l \rangle = (g^{-1})^{ik} \underbrace{(g^{-1})^{jl} g_{kl}}_{\delta^j{}_k} = (g^{-1})^{ij}$$

※以後 $g^{ij} := (g^{-1})^{ij}$ と略記 $(g^{ik}g_{kj} = \delta^i{}_j)$

・Vの基底変換を考える

$$e_i' = e_j (R^{-1})^j{}_i \quad (= ({}^tR^{-1})_i{}^j e_j)$$

$$x = e_i' x'^i = e_j (R^{-1})^j{}_i x'^i = e_j x^j \quad \therefore x'^i = R^i{}_j x^j$$

$V^\dagger$では $f'^i = g'^{ij} e_j' = R^i{}_k \underbrace{R^j{}_l g^{kl} e_m (R^{-1})^m{}_j}_{\delta_l^m} = R^i{}_k \overbrace{g^{kl} e_l}^{f^k}$

宿題1 この式を用いてこの等式を示せ (和の添字が重複しないよう注意する)(両辺の(浮いた)添字が等しくなるよう…)

$$g'_{ij} = \langle e_i' | e_j' \rangle = g_{kl} (R^{-1})^k{}_i (R^{-1})^l{}_j \cdots (**)$$

$x^\dagger = x_i f^i$ と表したとき $x_i' = x_i (R^{-1})^j{}_i = ({}^tR^{-1})_i{}^j x_j$

・内積を不変に保つ変換を考える. (i.e. $g_{ij}' = g_{ij}$)

上の(**)式より. プライムなしと同じ

$$({}^tR)_i{}^k g_{kl}' R^l{}_j = g_{ij} \Leftrightarrow {}^tR g R = g$$

※1/17版のノートは不要なギロンでしたので差し替えました. (音声解説と対応しません)

e_i : 正規直交基底 ⇒ $g_{ij} = \delta_{ij}$ (ユークリッド計量)

⇒ ${}^tRR = 1$ (R:直交行列)

注 ユークリッドでは ${}^tR = R^{-1}$ より "共変=反変"

・ここから $V = (\mathbb{R}^{1,3}, \text{"}\langle\ |\ \rangle\text{"})$ に戻る　　$(x^0 \equiv ct)$

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \text{ : ローレンツ不変 (命題6.19)}$$

$$= {}^t x \eta x \overset{(*)}{\longmapsto} {}^t x \underbrace{{}^t\Lambda \eta \Lambda}_{\eta} x \qquad \eta := \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$ 正定値性なし

← これをみたす Λ 全体
= 広義ローレンツ群

<u>定義6.24</u> 座標変換が広義ローレンツ群に従い、計量 $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ をもつ4次元空間をミンコフスキー空間という

ミンコフスキー計量

<u>注6.25</u> $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-x_0, x_1, x_2, x_3)$

添字の上げ下げ　　時間成分の上げ下げで符号が出る

<u>定義6.26</u> (tensor)

$\overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{p} \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{q}$
tensor積

座標変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ で以下のように変換する量 $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ を
p 階反変 q 階共変 ((p,q) 型) tensor という。

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p} ({}^t\Lambda^{-1})_{\nu_1}{}^{\sigma_1} \cdots ({}^t\Lambda^{-1})_{\nu_q}{}^{\sigma_q} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q}$$

特に $p = q = 0$ のとき T は scalar といい、$T' = T$

〈tensor の演算〉 (詳しくは [風間] 5章)

(i) 添字の上げ下げ (共変 ↔ 反変)　<u>例</u> $\eta_{\mu\nu} A^\nu{}_\rho = A_{\mu\rho}$　　$(1,1) \to (0,2)$

(ii) 添字の縮約　<u>例</u> $A^{\mu\nu}{}_\nu = B^\mu$, $A^\mu B_\mu = C$ ←「V^*, V 間で Tr がとられている」

(iii) tensor の微分　<u>例</u> $\partial_\mu A(x) = B_\mu(x)$
$(\partial^\mu := \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \text{ : 反変})$

$V^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(V, V)$
cf. [横沼]

例6.27 (Lorentz scalar)

物体とともに動く時計の示す時間

$(cd\tau)^2 = -dx_\mu dx^\mu = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$

(i) $s^2 = x_\mu x^\mu = -(ct)^2 + \vec{x}^2$

(ii) 無限小の固有時間間隔 $d\tau := \frac{1}{c}\sqrt{dx_\mu dx^\mu} = dt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma}dt$

(iii) $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ $(|\det\Lambda| = 1)$

$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$

ダランベルシアン

(iv) $\Box := \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_0^2 + \underbrace{\partial_{\vec{x}}^2}_{\text{ラプラシアン}}$ (cf. P35 (W))

例6.28 (Lorentz vector)

$\beta := \frac{v}{c}$

(i) 4元速度 $u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} \left(= \gamma(\underset{\text{時間成分}}{c}, \underset{\text{空間成分}}{\vec{v}})\right)$ …① $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$u_\mu u^\mu = -\gamma^2(c^2 - v^2) = -c^2$ (一定) …②

(ii) 4元運動量 $p^\mu := mu^\mu \overset{①}{=} (\underbrace{m\gamma c}_{p^0}, \underbrace{m\gamma\vec{v}}_{\vec{p}}) =: \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ …③

$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{|\beta|<1}{\overset{\beta\simeq 0}{=}} \underbrace{mc^2}_{\text{静止エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{非相対論的運動エネルギー}} + O(\beta^2)$ ← 宿題2 これを示せ

②×m^2 & ③: $p_\mu p^\mu \underset{③}{=} -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 \underset{②\times m^2}{=} -m^2c^2$ …④

$\therefore\ E^2 = (c\vec{p})^2 + (mc^2)^2$ …⑤ (← $m=0$ のときも実は正しく $E = c|\vec{p}|$)

定理6.29 $\begin{pmatrix}\text{Lorentz}\\\text{tensor}\end{pmatrix} = 0$ の式はローレンツ不変

$\because\ T^{\cdots}_{\cdots} \xrightarrow{(k)} T'^{\cdots}_{\cdots} = \Lambda\Lambda\,{}^t\Lambda^{-1}\,{}^t\Lambda^{-1}\,\overset{0}{T^{\cdots}_{\cdots}} = 0$ ∎

※ 光量子仮説を認めれば、

$E = \hbar\omega = h\nu$

$|\vec{p}| = \hbar|\vec{k}| = \frac{h}{\lambda}$

& $c = \lambda\nu$ より従う

例6.30

• Maxwell eq. : レポート8 & form は大域的 ⇒ $F_{\mu\nu}, A_\mu, j_\mu$: tensor

$$\begin{cases}\partial^\mu F_{\mu\nu} = -j_\nu & \leftarrow \text{運動方程式} \\ \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 & \leftarrow \text{ビアンキの恒等式}\end{cases}$$

$j_\mu := (-c\rho, \vec{j})$, $A_\mu := (-\phi, \vec{A})$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

• 相対論的運動方程式 (ミンコフスキー eq.) ← 0成分: $\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$ (仕事率)

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \underset{4元力}{K^\mu} := \left(\frac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{f}, \gamma\vec{f}\right) \xrightarrow{\beta=0\text{で}} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{f} \text{ : Newtonの運動方程式}$$

cf. [山本・中村] 上巻 p.561, [米谷]

宿題2 「テイラー展開せよ」と言われたら"テイラー展開"してはいけません!

⇔ テイラーの公式を用いて展開

(2次方程式をいつでも解の公式を用いているのと同等です)

(解答例) $\frac{1}{1-\beta^2} \overset{公比\beta^2}{\underset{等比級数}{=}} 1+\beta^2+\beta^4+(高次)$ より ← (有限テイラー展開と思えばいつでもOK. 今は $|\beta|<1$ で問題なし)

$\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \underset{f(0)}{1} + a\beta^2 + (高次)$ の a を目算で求めて $a = \frac{1}{2}$ ∎ ← 偶関数だから奇数べき $=0$

$1+\beta^2+(高次) = \frac{1}{1-\beta^2} = (1+a\beta^2+\cdots)(1+a\beta^2+\cdots)$

(別解) $\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + b\beta^2 + (高次)$ とおくと. 両辺2乗して

$(1-\beta^2)(1+b\beta^2+\cdots)(1+b\beta^2+\cdots) = 1$ ∴ $b = \frac{1}{2}$ ∎

類題 $\log(1+x)$ ($x=0$ まわり) (30秒で答えよ. ヒント: 微分)

宿題1 両辺に行列をかける操作を添字付きで行う →

$g'_{ij} = g_{kl}(R^{-1})^k{}_i (R^{-1})^l{}_j$ ← i,j が浮いた足

↓両辺に右から R をかける

$g'_{ij}R^j{}_m = g_{kl}(R^{-1})^k{}_i (R^{-1})^l{}_j R^j{}_m$ …

浮いた足 j を縮約

§7 相対論的量子力学

［坂本, 西島, 坂井］ '22 1/24

7.1 クライン・ゴルドン方程式

$\left(E = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + V \xrightarrow{\text{量子化}} \right.$ 非相対論的量子力学 (Sch. eq.) $)$

← P44 ⑤式

$E^2 = (c\vec{p})^2 + (mc^2)^2 \rightsquigarrow$ 相対論的量子力学

$E \mapsto i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_k \mapsto \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^k}$

$\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$: Lorentz scalar とする!!

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi(x) = \left(\left(\frac{\hbar c}{i}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^2 + (mc^2)\right)\phi(x) \quad \cdots ①$$

← ダランベルシアン

$\Leftrightarrow (\Box - m^2)\phi = 0$ Klein-Gordon (KG) eq. ($\hbar = c = 1$ とした。以後同様)

(次元解析より $\hbar, c$ は復元可能: $\left(\Box - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0$)

(長さ)$^{-2}$ = (長さ)$^{-2}$ の次元

注7.1
- KG eq. はローレンツ不変
- ϕ はスピン0の粒子を記述 (cf. P32 例5.5)

7.2 ディラック方程式

KG eq は2階の微分 eq. $\rightsquigarrow$ 1階の方が本質的?:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \mathcal{H}\psi(x) \quad \cdots ②$$

$$\mathcal{H} = \left(\frac{1}{i}\alpha^j\frac{\partial}{\partial x^j} + \beta m\right), \quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N\end{pmatrix}$$

(α^j: エルミート; α^j, β: $N\times N$ エルミート行列)

の形で以下をみたすものを考える:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi(x) = \mathcal{H}^2\psi(x)$$

← KGのものと一致 (cf. ①の右辺)

$$\Rightarrow ③ \begin{cases} \alpha^j\alpha^k + \alpha^k\alpha^j = 2\delta^{jk} \\ \alpha^j\beta + \beta\alpha^j = 0 \\ \beta^2 = 1 \end{cases}$$

宿題1 ← ③を導け

(クリフォード代数の一種)

ミンコフスキー計量

$\Leftrightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu}$ ④

(ただし $\gamma^0 := \beta, \gamma^k := \beta\alpha^k$)

命題7.2 ③は $N=2,3$ で解なし. $N=4$ でのみ存在:

e.g. $\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$ ←パウリ行列 , $\beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} = \gamma^0$ $\left(\Leftrightarrow \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \right)$ ← Diracのγ行列という

4成分

② $\overset{N=4}{\Leftrightarrow}$ $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$: Dirac eq. (1928)

宿題2

注7.3 ・Dirac eq はローレンツ不変 [坂本]

・ψ は Dirac spinor と呼ばれ, スピン$\frac{1}{2}$の粒子を記述 (例5.5)

(i) $\hbar, c$ を明記して Dirac eq. を書け

例7.4 (簡単な解)

$$\psi_n(x) = u_n(p)\, e^{i\overbrace{(-Et + \vec{p}\cdot\vec{x})}^{p_\mu x^\mu}} \quad (E^2 = \vec{p}^2 + m^2)$$

重力定数

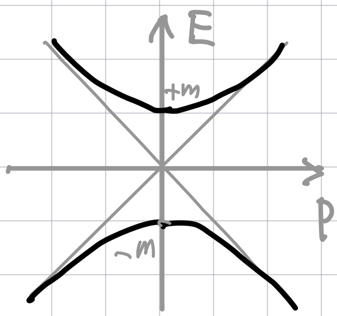
(ii) $G, \hbar, c$ から長さの次元を持つ量を作り, 有効数字1ケタでその数値を求めよ. (量子重力の典型的スケールを表す)

↓ 定常状態で$\mathcal{H}$を対角化して固有値問題を解く

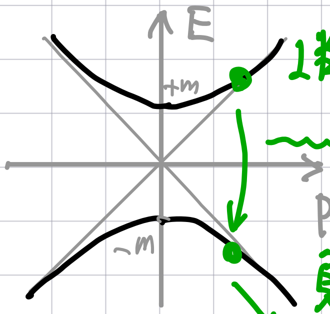
$E = +\sqrt{p^2+m^2}$ ⇝ 2つの固有ベクトル [西島 P28] 単位もつけて

$E = -\sqrt{p^2+m^2}$ ⇝ 2つの固有ベクトル ← 負のエネルギー準位!

真空の不安定性の問題:

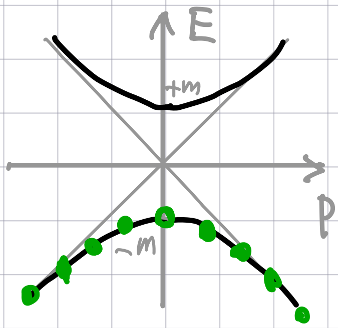


もしも,
「真空=正負の準位とも
電子が全くない
状態」ならば

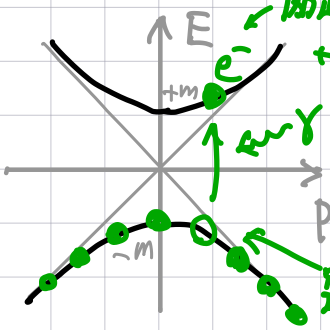


1粒子状態
⇝ γ
負の準位に落ちて
"run away"

Diracの解釈 (1930)



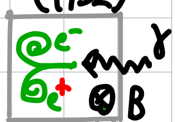
真空=負の準位に
ぎっしり電子が
詰まった状態



励起状態(電子)
$+E, -e$
mは同じ

空孔 $\begin{pmatrix} -E \\ -e\text{不在} \end{pmatrix} \equiv e^+ \begin{pmatrix} +E \\ +e \end{pmatrix}$
陽電子

アンダーソン
(1932)



霧箱

§8 ゲージ原理

<u>命題8.1</u> $A_\mu := (-\phi, \vec{A})$ としたとき Maxwell eq. は以下の変換の下不変:

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda, \quad \cdots (*)$$

$\lambda(x)$: 任意の実関数

これを(電磁場に対する)ゲージ変換と呼ぶ

∵ $F' = dA' = d(A + d\lambda) = dA = F$ ▨

0

<u>注8.2</u> ・ゲージ変換はローレンツ変換とは独立で(時空でなく)「内部空間」の対称性を表す

・古典電磁気学では $\vec{E}, \vec{B}$ が主役 (A_μ は「補助的な」場)

・量子論では A_μ も重要な役割を果たす (e.g. アハラノフ・ボーム効果)

<u>原理8.2</u> (Weyl, 1929年)

電磁場と波動関数 ϕ が相互作用するシステムは以下のように実現される:

・微分 ∂_μ を共変微分 $D_\mu := \partial_\mu + ieA_\mu$ におきかえる

・ϕ のゲージ変換を(*)と合わせて以下のように定義する:

$$\phi \mapsto \phi' \mapsto e^{i\theta}\phi, \quad \cdots (**)$$

$\theta(x) := e\lambda(x)$

このとき $D_\mu\phi \mapsto e^{i\theta} D_\mu \phi$ と共変的に変換する.

$$∵ \; D_\mu\phi \mapsto (\partial_\mu + ieA'_\mu)\phi' = (\partial_\mu + ieA_\mu - ie\partial_\mu\lambda)\, e^{i\theta}\phi = e^{i\theta}D_\mu\phi \quad ▨$$

$i\partial_\mu\theta$ (キャンセル)

<u>例8.3</u> 電磁場と相互作用する(⇔電荷をもった粒子の) Dirac eq.: (P27)

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0$$

[坂本 P99] ↓ 非相対論的極限 & $\psi = e^{-imt}\begin{pmatrix}\xi \\ \chi\end{pmatrix}$

4成分　各2成分

スピン($\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$)と磁場 $\vec{B}$ との相互作用項が自然に出てくる!

$$i\frac{\partial}{\partial t}\xi(x) = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla + e\vec{A}\right)^2 I_2 + \underbrace{\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}}_{\text{パウリ項}} - e\phi I_2\right]\xi(x) \quad \begin{pmatrix}\uparrow\text{成分} \\ \downarrow\text{成分}\end{pmatrix}$$

スピン表示の波動関数!

パウリ方程式

(電磁気の)スカラーポテンシャル