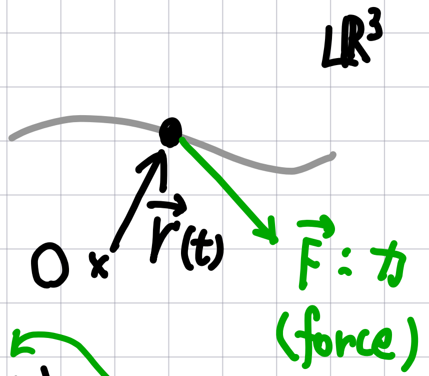
§1 古典力学

'22 4/22

1

1.1 Newton 力学

舞台 : $\mathbb{R}^3$



物体の$\mathbb{R}^3$内での運動を考える

特に断りがない限り関数はすべて C^∞ 級

・位置(position) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

・速度(velosity) $\vec{v}(t) := \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) \left(= \dot{\vec{r}}\right.$ とも書く$\left.\right)$

・加速度(acceleration) $\vec{a}(t) := \dfrac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

[※ 担当教員が $\vec{r}$ でなく $\vec{R}$ を用いる理由: $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$]

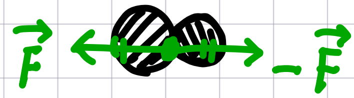
法則 1.1 (Newton の運動法則)

(I) (慣性の法則) 物体に力が加わらなければ、物体は等速直線運動を続ける。(特に静止している物体は静止したままである。)

(II) (運動方程式) 物体に力 $\vec{F}$ が加わると、以下をみたす加速度 $\vec{a}$ が生じる。
Equation of Motion (=EOM)

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (m : 質点の質量(mass))$$

(III) (作用・反作用の法則) 2つの物体間にはたらき合う力は大きさが等しく、向きが互いに逆である。



定義 1.2 慣性の法則が成り立つ座標系を慣性系(inertial frame)という

注 1.3
・法則(I) は慣性系の存在を保証する命題
・法則(III) は質量の定義に用いられた (by Mach)
・物質(物体)と力は別物 (二元論) (力の起源は「場」)

定義1.4　運動量 $\vec{p} := m\vec{v}$

注1.5 EOM ⇔ $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ ⇒ $\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt}^{\text{力積}}$

定義1.6 角運動量 $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$ ← ベクトルの外積

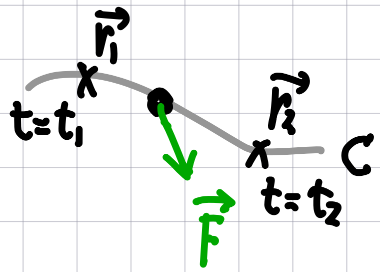
力のモーメント $\vec{N} := \vec{r} \times \vec{F}$

$\Big\} \xRightarrow[\text{EOM}]{} \dot{\vec{L}} = \vec{N}$

定義1.7 $\vec{r}_1$から$\vec{r}_2$へ経路Cに沿って物体が運動するとき$\vec{F}$がする仕事

$$W := \int_{C\,\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

"内積"



定義1.8 力$\vec{F}$のする仕事が始点$\vec{r}_1$と終点$\vec{r}_2$だけで決まり、途中の経路Cによらないとき、$\vec{F}$を保存力(conservation force)という。

このとき

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\vec{F}}_{= m\ddot{\vec{r}}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) dt$$

← EOM

← $\vec{a}^2 := \vec{a} \cdot \vec{a}$ 略記

$$= K(t_2) - K(t_1), \quad K(t) := \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2m} \vec{p}^2$$

運動エネルギー(kinetic energy)

命題1.9 $\vec{F}$:保存力

⇔ $^{\exists} U(\vec{r})$ s.t. $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$　　$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ナブラ(nabla)

力のポテンシャル

∵ ポアンカレの補題 ∅　(このとき $U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (経路によらない))

← 基準点(s.t. $U(\vec{r}_0) = 0$)

系1.10 物体に働く力が保存力

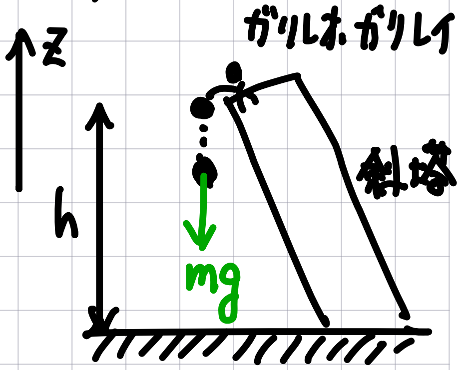
⇒ $W = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = K(t_2) - K(t_1)$

すなわち全エネルギー $E := K + U$ は保存する(エネルギー保存則)

例1.11 物体の落体運動 $\left(\begin{array}{l}\text{初期条件}\\ t=0\text{で}\end{array}\ \vec{r}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix},\ \vec{v}(0)=\vec{0}\right)$

(i) 空気抵抗のない場合

〈実験〉



g: 重力加速度

EOM: $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg$ （定数）

↓ tで2回積分

$$z = \underset{\uparrow}{C_2} + \underset{\uparrow}{C_1}\,t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{（一般解）}$$

積分定数

↓ 初期条件より $C_2 = h,\ C_1 = 0$ と決まる

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2, \quad v(t) = -gt$$

↓ $z(T) = 0$ より

$$h = \frac{1}{2}gT^2 \iff T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(1) を説明！　(2) を説明！

↓

ガリレイの実験結果

(1) $h \propto T^2$

(2) T は m によらない

（T: 地面に落下するまでの時間）

(ii) 速さに比例する空気抵抗力のある場合（粘性抵抗力）

EOM: $m\dfrac{dv_z}{dt} = -mg - \underbrace{mk}_{\text{比例定数（ただし }k>0\text{）}} v_z$

宿題1 ↓ 微分方程式を解け

$$z(t) = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right), \quad v_z(t) = \frac{g}{k}\left(e^{-kt} - 1\right) \xrightarrow{t\to\infty} \underbrace{-\frac{g}{k}}_{\text{一定値（終端速度）}}$$

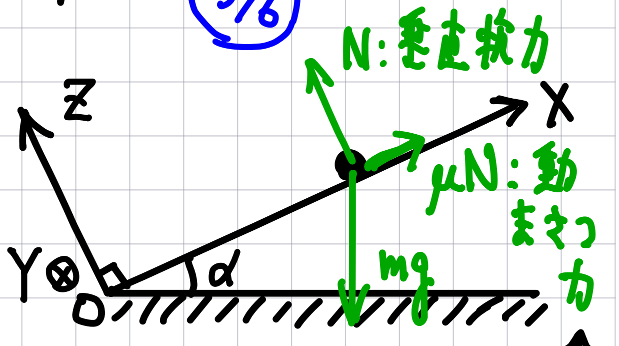
(iii) 速さの2乗に比例する空気抵抗力（慣性抵抗力）のある場合

レポートにします（詳細は後日）

※ 空気抵抗力は保存力ではない

例1.12 斜面での運動 (動まさつ係数 = μ (ミュー))

$\vec{v}(0)=\vec{0}$ からの滑落の場合 $(Y=0)$:



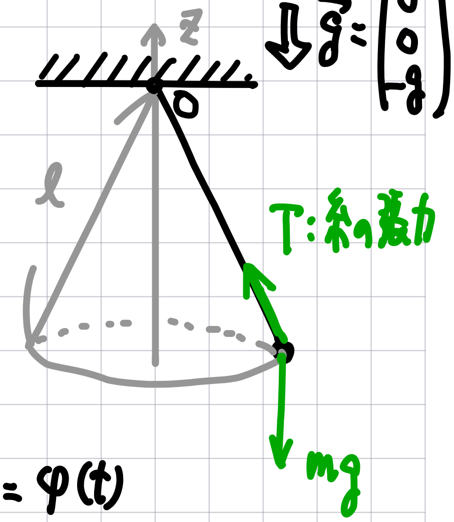
EOM
$$\begin{cases} m\ddot{X} = -mg\sin\alpha + \mu N \\ m\underbrace{\ddot{Z}}_{=0} = N - mg\cos\alpha \end{cases}$$
← 斜面上に拘束: $Z=0$

拘束面 = XY平面 $(Z=0)$

注 Nは未知変数で拘束条件から決まる

自由度が拘束条件1つ ⇔ 1つ減る

例1.13 球面振り子



$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

EOM $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{T}$, $\vec{T} = -T\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

拘束面 = 半径ℓの球面 S^2_ℓ $(|\vec{r}|=\ell)$ 拘束条件1つ

極座標
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$\theta=\theta(t)$, $\varphi=\varphi(t)$ 力学変数 (2つ)

整理すると
$$\begin{cases} m\ell(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) = mg\cos\theta + T \\ m\ell(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2) = mg\sin\theta \\ m\ell(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

← Tを決める式 ← 宿題 これを示せ

運動を決める式

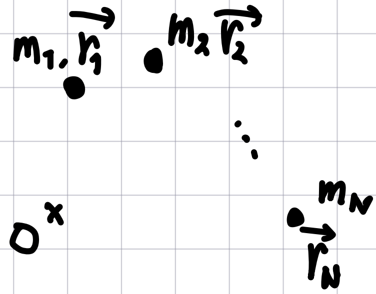
★ 拘束力 N, T を (はじめから) 消去し、拘束面上で EOM を考えたい ⟶ 一般化座標

★ 座標のとり方によらない定式化をしたい ⟶ 解析力学

1.2 仮想変位、ダランベールの原理

・N個の質点からなるシステム (system) を考える.

EOM : $m_\alpha \dfrac{d^2\vec{r}_\alpha}{dt^2} = \vec{F}_\alpha \qquad \alpha \in \{1, \cdots, N\}$



$\vec{x} := (\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N)$: N質点の座標

$(m_1, \cdots, m_N)$: 〃 質量

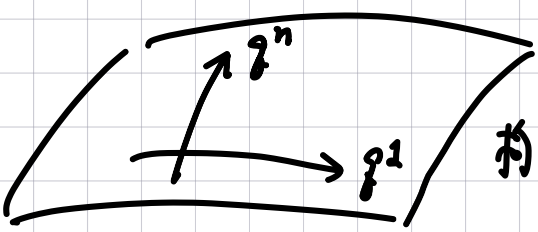
・このシステムに以下の独立な約束条件が与えられたとする

$f_s(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N, t) = 0 \qquad s \in \{1, \cdots, p\}$

このとき $(3N-p)$ 個の独立なパラメータを用いて

$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q^1, \cdots, q^n, t)$ （$=: \vec{r}_\alpha(q, t)$ と略記）

とパラメトライズできる。 $\mathbb{R}^{3N}$



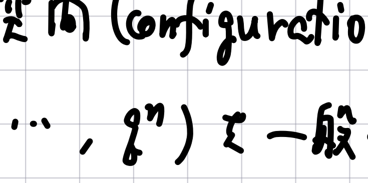
約束面N $(\dim N = n = 3N - p)$

定義1.14 $N = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_s(\vec{x}, t) = 0, s \in \{1, \cdots, p\}\}$ を配位空間 (configuration space) という.

$(q^1, \cdots, q^n)$ を一般化座標という. （n : システムの自由度）

例1.15 (cf. 前ページ)

(i) 斜面



$f_1(\vec{r}) = z - \tan\alpha \cdot x = 0$

自由度 2, $q^1 = X$, $q^2 = Y$

N = XY平面 $\begin{pmatrix} \shortparallel \\ Y \end{pmatrix}$

(ii) 球面振り子

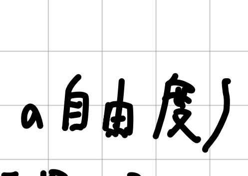
$\tilde{f}_1(\vec{r}) = |\vec{r}| - l = 0$

自由度 2

$q^1 = \theta$, $q^2 = \varphi$

$N = S^2$ (球面)

(iii) 斜面振り子



$f_1(\vec{r}) = 0$, $\tilde{f}_1(\vec{r}) = 0$

自由度 1, $q^1 = \varphi$. $N = S^1$

・以後 EoMの右辺の力は保存力と拘束力のみと仮定(理想化):

改めて、$\vec{F}_{\alpha,\mathrm{total}} = \underbrace{\vec{F}_\alpha}_{\text{保存力}} + \underbrace{\vec{F}'_\alpha}_{\text{拘束力}}$ と書く

拘束力(拘束面と垂直!)

定義1.16 拘束面N上での無限小変位を仮想変位といい、以下で表す

$$\delta\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}\,\delta q^i \quad \left(:= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}\,\delta q^i \;:\; \text{Einstein の規約} \right)$$

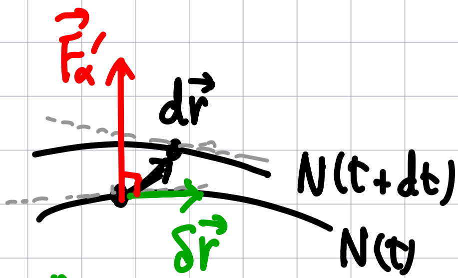
同じ添字が単項式の中にあるときは和がとられていると約束

注1.16 $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q^i, t)$ の全微分

$$d\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}\,dq^i + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}\,dt \quad \cdots ①$$

ここが違う

命題1.17 (ダランベールの原理)
d'Alembert



(tを止めて全微分)

$$\sum_\alpha \left\{ \left(\vec{F}_\alpha - m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha\right)\cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \right\} \delta q^i = 0$$

☺ $\vec{F}'_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0$ (拘束力のする(仮想)仕事はゼロ)

拘束力 内積

$\overset{\text{EOM}}{=} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha$ ← 保存力

例1.18 球面振り子 $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - \frac{T}{l}\vec{r}$ (例1.13)

$(m\vec{g} - m\ddot{\vec{r}})\cdot\delta\vec{r} = 0$

⇓

$$\left\{ ml^2(\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2) - mgl\sin\theta \right\}\delta\theta + ml^2(\sin^2\theta\,\ddot\varphi + 2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi\dot\theta)\,\delta\varphi = 0$$

$\underline{\ \ }=0$ ⇔ EoM

同じ結果(Tは自動的に排除)

※ $\delta\theta, \delta\varphi$ は T^*_qN の基底

1.3 ラグランジュ形式の力学

保存力 $\vec{F}_\alpha = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha}$ $\left(\dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} := \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right) \equiv \underset{\substack{\text{nabla} \\ (\text{ナブラ})}}{\nabla} \text{ とも書く} \right)$

ポテンシャル・エネルギー $U = U(q, t)$

運動エネルギー $K = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} = K(q, \dot{q}, t)$

定義1.19 $L(q, \dot{q}, t) := K - U$ をラグランジアン (Lagrangian) という

定理1.20 EoM は単一のスカラー関数 L だけを用いて以下のように書ける

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad i \in \{1, \cdots, n\}$$

ここにシステムの情報がすべて入っている

これをラグランジュ方程式という.

∵ ダランベール: $\sum_\alpha (m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha) \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_\alpha \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}}_{= \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}^i}} \right) - m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \right)}_{= \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q^i}} \right\} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \quad \cdots (※)$$

①より
$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}$$
両辺 $\dot{q}^i$ で偏微分

$$\therefore (※)\text{の左辺} = \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}^i} \right) - \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q^i}$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \Big(\underbrace{\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha}_{K} \Big) \right\} - \frac{\partial}{\partial q^i} \Big(\underbrace{\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha}_{K} \Big)$$

$$(※)\text{の右辺} = \sum_\alpha \left(-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i}$$

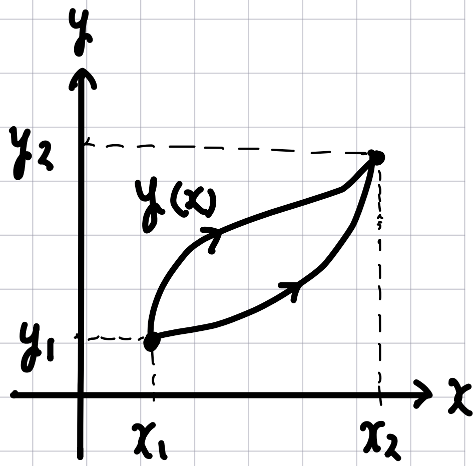
$\left(\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}^i} = 0 \text{ に注} \right)$ ■

1.4 変分原理

$y = y(x)$: (C^∞級) 実関数(「$\mathbb{R}^2$の経路」と呼ぶ)

以下の汎関数(functional)を考える

$$S[y] := \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx \in \mathbb{R}, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$



定義1.21 $S[y]$の極大・極小を与える経路yを停留曲線(stationary curve)といい、y_*と書く

$y_1 := y(x_1)$, $y_2 := y(x_2)$を固定したSの「変分」を考える.

問 $y(x) = y_*(x) + \underbrace{\delta y(x)}_{\text{無限小}}$ としたとき "$\dfrac{\delta S}{\delta y}$" は? (汎関数微分)

答 $\delta y(x) = \underset{\text{無限小パラメータ}}{\varepsilon}\, \eta(x)$, $\eta(x)$: 任意関数 (ただし $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$: b.c.) boundary condition

と表してみよう。 このとき $S = \underset{\varepsilon\text{の普通の関数}}{S(\varepsilon)}$ と考えられる

命題1.22 y_*が停留曲線 $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0$

(∵) S ($= S[y_* + \varepsilon\eta]$) が $\varepsilon = 0$ で極値:

$f(y+\varepsilon\eta, \dot{y}+\varepsilon\dot{\eta}, x) \overset{\text{Taylor}}{=} f(y, \dot{y}, x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\varepsilon\eta + \dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}}\varepsilon\dot{\eta} + O(\varepsilon^2)$

$$0 = \frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\dot{\eta}\right]$$

部分積分

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right]}_{=0} \underset{\text{任意}}{\eta} + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\eta\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0\ (\text{b.c.})} \qquad \blacksquare$$

※ 慣れてくると

∵ $\delta S[y] = S[y+\delta y] - S[y] \Big|_{\delta y \text{の1次}}$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y} \right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \right]}_{= 0} \underbrace{\delta y}_{\text{任意}} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{(\text{表面項})}}$$

□

注1.23 $y \rightsquigarrow (y^1, \cdots, y^n)$ 多変数化は同様

定義1.24 $y^i = y^i(x)$: $\mathbb{R}^{n+1}$ の経路 $(i \in \{1, \cdots, n\})$

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i}\right) = 0$$ をオイラー eq. という.
(Euler) eq. = equation (方程式)

$[y^1, \cdots, y^n]$

今日の宿題: $S[y^i]$ の(端点を固定したときの)停留曲線がオイラー eq. を与えることを示せ (上記の議論を多変数化するということ)

(アインシュタインの規約を用いることを勧める)

注1.25 特に, $x \to t$ (時間), $y^i(x) \to q^i(t)$ (一般化座標),

$f(y^i, \dot{y}^i, x) \to L(q^i, \dot{q}^i, t)$ のおきかえで オイラー eq. はラグランジュ eq. と一致!

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$$: オイラー・ラグランジュ eq. という
(E-L)

系1.26 (ハミルトンの原理)

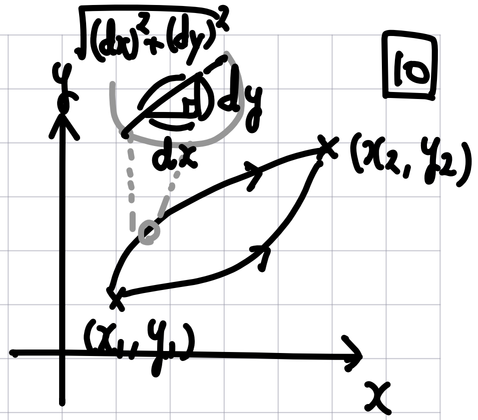
N質点のシステムが現実にとる経路は

作用積分 (action integral) $S := \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q^i, \dot{q}^i, t)$ の停留曲線である.

例1.27 $\mathbb{R}^2$上 最短距離を与える経路 y_*？

$$S = \underset{\text{Sum}}{\int} \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}_{f(y,\dot{y},x)}$$

ピタゴラスより



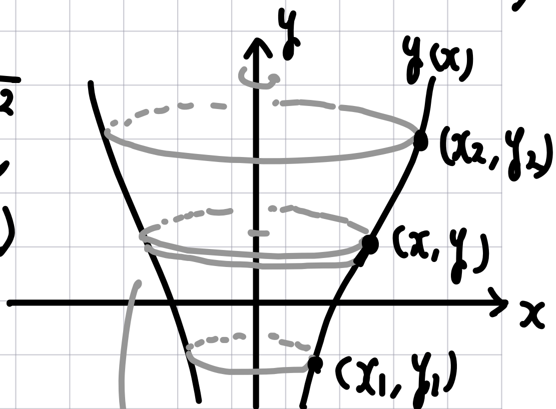
Euler eq. $\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \Rightarrow \dot{y} = a$ (const) $\Rightarrow y = ax + b$ (直線)

積分定数 (b.c. から決まる)

例1.28 回転体の極小曲面 (表面積を極小にする y_*？)

$$S = \int 2\pi x \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{x\sqrt{1+\dot{y}^2}}_{f(y,\dot{y},x)}$$

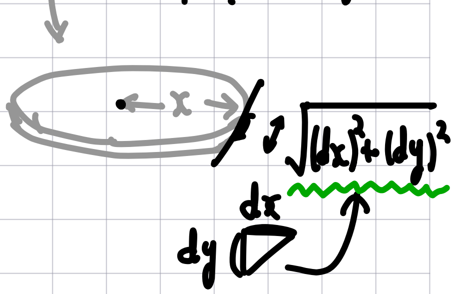
(右下図)



Euler eq.

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right)$$

$$\therefore \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = a \qquad \therefore \dot{y}^2 = \frac{a^2}{x^2-a^2}$$

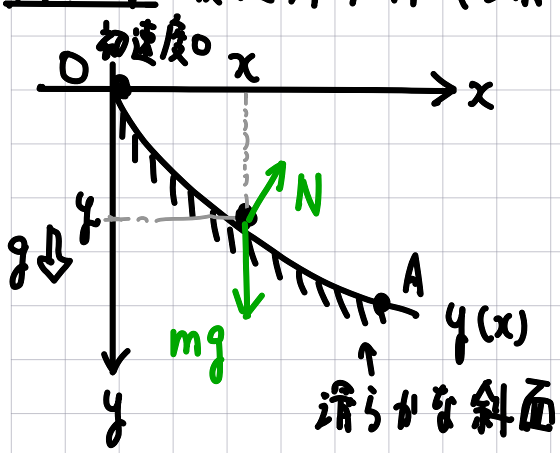


$$\therefore dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \overset{x = a\cosh\xi}{=} a\,d\xi$$

(積分定数 a, b は b.c. から決まる)

$$\therefore y = a\xi + b \qquad \therefore x = a\cosh\left(\frac{y-b}{a}\right)$$: catenary 懸垂曲線

例1.29 最速降下線 (レポート)



所要時間 $t_{O\to A}$ が最短となる経路 y_*？

$$S = \int \frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{v} \qquad \left(\frac{1}{2}mv^2 = mgy\right)$$

[Hint] $f = f(y, \dot{y})$ のとき $\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - f = \text{const.}$

(答) cycloid $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$

1.5 微分形式（付録的内容）

'22 5/14

$(x^1, \cdots, x^n)$: $\mathbb{R}^n$ の座標

$U \subset \mathbb{R}^n$: 開集合とする

以後単に「p-form」と呼ぶ

<u>定義 1.30</u> U上の微分p形式とは．以下で定義される外積代数の元である：

U上の C^∞ 関数　　$(x^1, \cdots, x^n)$ の略記

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \cdots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \in \Omega^p(U)$$

$\wedge$: wedge 積と呼ぶ

$$(*) \begin{cases} dx^i \wedge dx^i = 0 \\ dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \end{cases}$$

(例) $\mathbb{R}^3$ のとき

0-form : $\omega_0 = f$ （関数）

1-form : $\omega_1 = f_i\, dx^i = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3$

2-form : $\omega_2 = f_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 + f_{13}\, dx^1 \wedge dx^3 + f_{23}\, dx^2 \wedge dx^3$

3-form : $\omega_3 = f_{123}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

<u>定義 1.31</u> 外微分 $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$ は以下で定義される：

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

← Einstein の規約が用いられている

↑関数

$$d\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} df_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

↑ 1.30 の ω_p

<u>命題 1.32</u> $d \circ d = 0$

例 1.33　$\mathbb{R}^3$ のとき

まず記号の導入：

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

関数

$$\mathrm{grad}\, f := \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right)$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{f} := \nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}, \frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1}, \frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right)$$

$$\mathrm{div}\, \vec{f} := \nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{\partial f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}$$

外微分（ω_p は前ページの(例)のもの）

- $d : \Omega^0 \to \Omega^1$

i について和

$$d\omega_0 = df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = (\mathrm{grad}\, f) \cdot d\vec{x}$$

- $d : \Omega^1 \to \Omega^2$

i, j について和

$$d\omega_1 = df_i \wedge dx^i = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

$$= (\mathrm{rot}\, \vec{f}) \cdot d\vec{S} \quad ① \qquad \vec{S} := \begin{pmatrix} dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^3 \wedge dx^1 \\ dx^1 \wedge dx^2 \end{pmatrix}$$

(*)に注意

- $d : \Omega^2 \to \Omega^3$

$$d\omega_2 = \mathrm{div}\, \vec{f}' \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad ② \qquad \vec{f}' := \begin{pmatrix} f_{23} \\ -f_{13} \\ f_{12} \end{pmatrix}$$

宿題 ①, ② を示せ（ω_2 は前ページのもの）

まとめると

$$\Omega^0 \xrightarrow[\mathrm{grad}]{d} \Omega^1 \xrightarrow[\mathrm{rot}]{d} \Omega^2 \xrightarrow[\mathrm{div}]{d} \Omega^3$$

$$d^2 = 0 \iff \mathrm{rot}\ \mathrm{grad} = 0 \quad \text{(勾配のうずはゼロ)}$$

$$\mathrm{div}\ \mathrm{rot} = 0 \quad \text{(うずの湧き出しはゼロ)}$$

命題1.34 (ポアンカレの補題)

$U \subset \mathbb{R}^n$：単連結とする

U上のp-formが $d\omega_p = 0$ をみたす $\Rightarrow$ ${}^{\exists}\eta_{p-1} \in \Omega^{p-1}$ s.t. $\omega_p = d\eta_{p-1}$

(例) $\vec{F}$ が保存力 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = -\mathrm{grad}\,{}^{\exists}U$

$\begin{pmatrix} F = F_i\,dx^i \\ \text{1-form} \end{pmatrix}$ 実は $\begin{pmatrix} \Updownarrow \\ dF = 0 \end{pmatrix} \overset{1.34}{}$ $\begin{pmatrix} \Updownarrow \\ F = -d\,{}^{\exists}\underset{\text{0-form}}{\underline{U}} \end{pmatrix}$ (cf. ノートP2)

定理1.35 (一般ストークスの定理)

$\mathbb{R}^n$のp次元領域Dとその境界∂Dに向きがつけられるとき

$$\int_D d\omega_{p-1} = \int_{\partial D} \omega_{p-1}$$

例1.36

(i) D = 曲線, ∂D = 点A, B 

, $\omega_0 = f$

$$\int_C df = f(B) - f(A) \quad \text{(微積分の基本定理)}$$

(ii) D = $\mathbb{R}^2$内の2次元領域, $\partial D = C$ (閉曲線), $\omega_1 = f_1\,dx^1 + f_2\,dx^2$

$$\int_D d\omega_1 = \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 = \int_C f_1\,dx^1 + f_2\,dx^2$$

(グリーンの定理)

(iii) D: $\mathbb{R}^3$内の曲面, $\partial D = C$ (閉曲線), $\omega_1 = f_i\,dx^i$

$$\int_D (\mathrm{rot}\,\vec{f}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad \text{(ストークスの定理)}$$

(iv) D: $\mathbb{R}^3$の3次元領域, $\partial D = S$ (閉曲面), $\omega_2 = J_1\,dx^2 \wedge dx^3 + J_2\,dx^3 \wedge dx^1 + J_3\,dx^1 \wedge dx^2$

$$\int_D (\mathrm{div}\,\vec{J})\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{(ガウスの定理)} \quad \vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$$

'22 5/20

1.6 対称性と保存則

$\dot{q}^i, q^i$ を略記

自由度 n の N 質点システム $L(q, \dot{q}, t)$ を考える

EL eq. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad i \in \{1, \cdots, n\}$

ラグランジアン $L = \dfrac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} - U(\vec{r}, t) = K(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$

定義1.37 $\dfrac{d}{dt}Q(q, \dot{q}, t) = 0$ を保存則といい，Q を保存量という

定義1.38 $p_i := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ を（q^i に共役な）一般化運動量という

(例) (i) Cartesian 座標 $\vec{r} \rightsquigarrow \vec{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}$ （普通の運動量）

(ii) 極座標 $\varphi \rightarrow p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = L_z$

（角運動量の z 成分）

定義と命題1.39

q^m : 循環座標 (cyclic coord.) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \dfrac{\partial L}{\partial q^m} = 0$ （L に q^m が陽に入っていないということ）

このとき $p_m = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}$ は保存量 ($\because$ EL eq.)

注1.40 q^i をうまく選んで，できるだけ多くの cyclic coords. を見つけると解きやすくなる。

（EOM は 2階の微分 eq.
Q=一定 は 1階 〃）

定義1.41 ある変数変換 $q(t) \mapsto q'(t)$ で
Lの関数形が不変であるとき，システムはその変換に対して対称性をもつという。

$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t)$

(例) (i) L が x^m を陽に含まないとき，システムは x^m 方向への平行移動に関して対称性をもつ　$x^m \mapsto x^m + a^m$

(ii) L が方位角 φ を陽に含まないとき，システムは z 軸まわりの回転に関して対称性をもつ

$\varphi \mapsto \varphi + \alpha$

☆前ページの(例)&1.39と合わせると，「(対称性) ⇒ (保存則)」が示唆

定理 1.42 (ネーターの定理)

ε を無限小パラメータとする微小変換

$$q^i(t) \mapsto q'^i(t) = q^i(t) + \varepsilon f^i(q, \dot{q}, t) \quad \cdots (*)$$

の下で $L(q, \dot{q}, t)$ が不変ならば，以下の Q は保存量：

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} f^i \quad : \text{ネーターチャージ}$$

← Einstein の規約

∵ $\delta q^i = \varepsilon f^i$ と書くと (先週と同様のギロンにより)

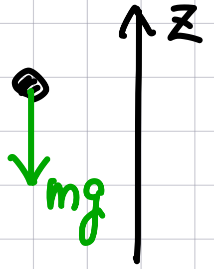
$$\delta L(q, \dot{q}, t) = L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \underbrace{\delta q^i}_{\varepsilon f^i}\right) - \underbrace{\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right\}}_{\overset{\text{EL eq.}}{=0}} \delta q^i \underset{L\text{不変}}{=} 0 \quad \blacksquare$$

系 1.43 上記の変換 (*) に対して $\delta L = \varepsilon \frac{d}{dt} Y(q, \dot{q}, t)$ となるとき，L は準不変であるという．このとき $Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} f^i - Y$ は保存量

∵ 宿題 これを示せ

(例) 一様な重力の下での質点の鉛直方向の運動



$$L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$$

$z \mapsto z + \varepsilon$ なる変換で $\delta L = -\varepsilon \frac{d}{dt}(mgt)$

$$Q = m(\dot{z} + gt) \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = 0$$

← EOM: $m\ddot{z} = -mg$

例1.44 以下の変換の下, Lが不変とする.

(i) 空間並進 $\vec{r}_\alpha \mapsto \vec{r}_\alpha{}' = \vec{r}_\alpha + \varepsilon \vec{n}$ … ①

$\vec{f}_\alpha = \vec{n}$ より $Q = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha} \cdot \vec{f}_\alpha = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \vec{n}$ (∝ 全運動量の $\vec{n}$ 方向成分)

(ii) 空間回転 $\vec{r}_\alpha \mapsto \vec{r}_\alpha{}' = R(\theta)\vec{r}_\alpha$ (z軸まわりとする)

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{無限小}}{\overset{\theta=\varepsilon}{=}} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ O & & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{O(\varepsilon^2)}_{\text{無視}}$$

$$\begin{pmatrix} x_\alpha' \\ y_\alpha' \\ z_\alpha' \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} & 〃 & \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} & 〃 & \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} + \varepsilon \overbrace{\begin{pmatrix} -y_\alpha \\ x_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}^{\vec{f}_\alpha}$$

$$Q = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \vec{f}_\alpha = \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha)_{z成分} = \sum_\alpha (\vec{L}_\alpha)_{z成分}$$

← 角運動量

(iii) 時間並進 $t \mapsto t' = t + \varepsilon$ (素朴にギロンする)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}_{p_i}\dot{q}^i\Big) - \underbrace{\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right\}}_{=0 \text{ E-L eq.}}\dot{q}^i$$

∴ $H := p_i \dot{q}^i - L$ は保存量

← 「ハミルトニアン」 (注) $K = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}^2$ のとき $H = K + U$ (全エネルギー)

1.7 ハミルトン形式の力学

$L(q,\dot{q},t)$: ラグランジアン

q^i : 一般化座標　$i\in\{1,\cdots,n\}$

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$: 〃運動量 ⟿ $\dot{q}_i = $ (pの関数)として表せる (陰関数の定理)

$\Uparrow$

定義1.45　L が非特異 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\det\left(\underbrace{\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}}_{=\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}}\right) \neq 0$　(以下これを仮定)

定義1.46　$H(q,p,t) := \dot{q}^i p_i - L(q,\dot{q},t)$ をハミルトニアンという (Hamiltonian)

iについて和

$\dot{q}$に依存しない

注1.47　$dH = \cancel{d\dot{q}^i p_i} + \underbrace{\dot{q}^i}_{=\frac{\partial H}{\partial p_i}} dp_i \underbrace{- \dfrac{\partial L}{\partial q^i}}_{=\frac{\partial H}{\partial q^i}} dq^i - \cancel{\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i} \underbrace{- \dfrac{\partial L}{\partial t}}_{=\frac{\partial H}{\partial t}} dt$

$\therefore$ ①

☆主張 : ラグランジュ形式 L $\xleftrightarrow[\text{1対1 (全単射)}]{\text{ルジャンドル変換}}$ ハミルトン形式 H

定義1.48 (ルジャンドル変換)

$x = (x^1,\cdots,x^n)$　(← $x \equiv \dot{q}$ のつもり)

$F(x)$: x^i の関数　$\left(\det \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \neq 0\right)$　(← $F \equiv L$)

とする。ここで変数 y_i を

$$y_i := \frac{\partial F}{\partial x^i}$$　(← $y \equiv p$)

で、関数 $G(y)$ を　(← $G \equiv H$)

$$F(x) + G(y) = x^i y_i \quad \cdots ②$$

で定義する. $(x, F(x))$ と $(y, G(y))$ との対応を Legendre 変換という

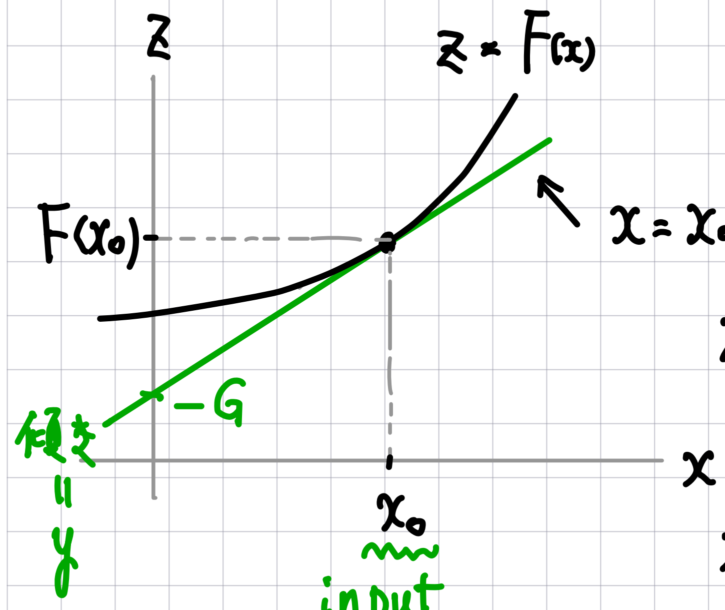
命題1.49

Legendre変換は1対1であり(全単射)、$x^i = \dfrac{\partial G}{\partial y_i}$, $\det \dfrac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j} \neq 0$ が成り立つ

〈n=1での説明(証明ではない!)〉

$$(x, F(x)) \longmapsto (y, G(y))$$

input　　　　output



$x = x_0$ での接線の式:

$$z - F(x_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)\,(x - x_0)$$

$$\Updownarrow$$

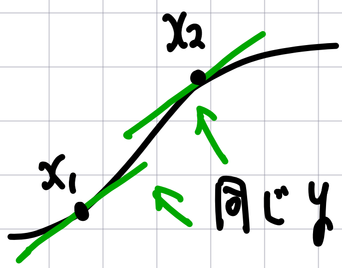
$$z = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)}_{=\,y_0}\,x - \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)\,x_0 - F(x_0)\right)}_{=\,G(y_0)\ ②}$$

y_0 output ≡ (接線の傾き)

$G(y_0)$ output ≡ −(y切片)

※ $F(x)$は凸 (上に or 下に) $\left(\Leftarrow \det_{不要} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \neq 0\right)$

Fが凸でないと
1対1でなくなる



∎

注1.50

- $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$ (注1.47 ① より)
- $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ のとき Hは保存量 (cf. 先週の例1.46(iii))
- $\dot{p}_i \overset{E\text{-}L}{=} \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$

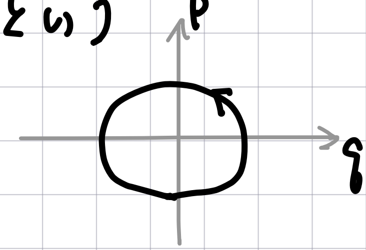
定義1.51 $\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$ (q.pに関して対称)

を(ハミルトンの)正準方程式 (canonical eq.) という。(q, p) を正準変数 (canonical variables) という.

宿題 $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$ のとき正準eq.を書き下せ (正準変数は $(\vec{r}, \vec{p})$)

定義1.52 $\{(q, p)\}_{q\in N}$ を相空間 (phase sp.) という

※ 現実の運動は相空間内の曲線で表される



〈まとめ〉

Legendre変換 (1:1)

	Lagrange形式	Hamilton形式
スカラー関数	$L(q, \dot{q})$	$H(q, p)$
基本方程式	Euler-Lagrange eq (tについて2階)	Hamiltonの正準eq (tについて1階)
幾何学的舞台	接ベクトル束 TN	余接ベクトル束 T^*N

宿題解答

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{m}\vec{p}$ (運動量の定義式)

$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}}_{\text{保存力}}$ (EOM)

1.8 正準変換 (簡単のためn=1とする。多変数化は容易)

<u>定義1.53</u> 変数変換 $(q,p)\mapsto(Q,P)$ が正準eq.を不変に保つ

i.e. $^\exists \mathcal{H}(Q,P,t)$ s.t. $\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial P},\ \dfrac{dP}{dt}=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q}$

とき、正準変換であるという。

<u>注1.54</u> このとき、変分原理より、

$$\delta\int\left(\underbrace{\dot{q}p-H(q,p,t)}_{L}\right)dt=\delta\int\left(\dot{Q}P-\mathcal{H}(Q,P,t)\right)dt=0$$

⇓ 同じEOMを与える　　　t積分で定数

$$^\exists W=W(q,p,Q,P,t)\ \text{s.t.}\ \dot{q}p-H=\dot{Q}P-\mathcal{H}+\frac{dW}{dt}$$

⇓

$$dW=p\,dq-P\,dQ+(\mathcal{H}-H)\,dt \qquad \cdots\ (\mathrm{i})$$

より $W=W_1(q,Q,t)$ と考えられる。このとき、以下が得られる:

$$p=\frac{\partial W_1}{\partial q},\quad P=-\frac{\partial W_1}{\partial Q},\quad \mathcal{H}=H+\frac{\partial W_1}{\partial t} \qquad \cdots\ (\mathrm{I})$$

<u>定義1.55</u> (I)を、W_1を母関数とする正準変換という

<u>注1.56</u> (i)は以下のように表すこともできる:

$$\begin{aligned}
dW_1&=p\,dq-d(PQ)+Q\,dP+(\mathcal{H}-H)\,dt &&\cdots\ (\mathrm{ii})\\
&=d(pq)-q\,dp-P\,dQ+(\quad\text{〃}\quad)\,dt &&\cdots\ (\mathrm{iii})\\
&=d(pq-PQ)-q\,dp+Q\,dP+(\ \text{〃}\ )\,dt &&\cdots\ (\mathrm{iv})
\end{aligned}$$

(ii)〜(iv)に対応した正準変換(II)〜(IV)が定まる:

	母関数	q	p	Q	P	$\mathcal{H}-H$
(I)	$W_1(q,Q,t)$		$\dfrac{\partial W_1}{\partial q}$		$-\dfrac{\partial W_1}{\partial Q}$	$\dfrac{\partial W_1}{\partial t}$
(II)	$W_2(q,P,t)=W_1+PQ$		$\dfrac{\partial W_2}{\partial q}$	$\dfrac{\partial W_2}{\partial P}$		$\dfrac{\partial W_2}{\partial t}$
(III)	$W_3(Q,p,t)=W_1-pq$	$-\dfrac{\partial W_3}{\partial p}$			$-\dfrac{\partial W_3}{\partial Q}$	$\dfrac{\partial W_3}{\partial t}$
(IV)	$W_4(p,P,t)=W_1-pq+PQ$	$-\dfrac{\partial W_4}{\partial p}$		$\dfrac{\partial W_4}{\partial P}$		$\dfrac{\partial W_4}{\partial t}$

(例) (I) $(x,p)\mapsto(\phi,P)$ を、$W_1(x,\phi)=\dfrac{A}{2}x^2\underbrace{\cot\phi}_{=\frac{1}{\tan\phi}}$ を母関数とする正準変換とする。このとき、

$$p=\frac{\partial W}{\partial x}=Ax\cot\phi,\quad P=-\frac{\partial W}{\partial\phi}=\frac{A}{2}x^2\frac{1}{\sin^2\phi}$$

$$\therefore\ \frac{p^2}{2A}+\frac{A}{2}x^2=P\ \cdots③,\qquad \frac{p^2}{P}=2A\cos^2\phi$$

$$\therefore\ p=\sqrt{2AP}\cos\phi,\quad x=\frac{p}{A}\tan\phi=\sqrt{\frac{2P}{A}}\sin\phi\quad\cdots④$$

特に $H=\dfrac{1}{2m}p^2+\dfrac{m\omega^2}{2}x^2$ (調和振動子) のとき、

$$\mathcal{H}=H\underset{A=m\omega}{\overset{③}{=}}\omega P$$

(変換後のハミルトニアンがシンプル!)

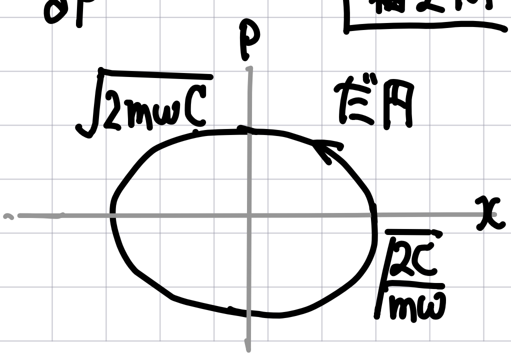
正準 eq. $\dfrac{dP}{dt}=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}=0$, $\dfrac{d\phi}{dt}=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial P}=\omega$

$\therefore\ P=C$ ←定数, $\phi=\omega t+\alpha$

④より
$$\begin{cases} p=\sqrt{2m\omega C}\cos(\omega t+\alpha)\\ x=\sqrt{\dfrac{2C}{m\omega}}\sin(\omega t+\alpha)\end{cases}$$

相空間

だ円



1.9 ポアソン括弧

'22 6/3

(q^i, p_i) 正準変数　$i \in \{1, \cdots, n\}$

定義1.57 $f(q,p,t)$, $g(q,p,t)$ に対して、Poisson Bracket (P.B.) を以下のように def する：

i について和

$$\underbrace{\{f, g\}_{q,p}}_{\text{以後、省略}} := \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}$$

(実は $(q,p) \xrightarrow{\text{正準}} (Q,P)$ のとき $\{f,g\}_{q,p} = \{f,g\}_{Q,P}$) ← [畑]など

例1.58
- $\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$, $\{q^i, q^j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$
- $\{q^i, f\} = \dfrac{\partial f}{\partial p^i}$, $\{p_i, f\} = -\dfrac{\partial f}{\partial q^i}$

基本ポアソン括弧

命題1.59
(i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (特に $\{f, f\} = 0$)

(ii) $\{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + b\{f, h\}$

(iii) $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$ Jacobi id

(iv) $\{fg, h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$

命題1.60
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\underbrace{\frac{dq^i}{dt}}_{=\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\underbrace{\frac{dp_i}{dt}}_{=-\frac{\partial H}{\partial q^i}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

正準eq.

定義1.61 f と g がポアソン可換 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{f, g\} = 0$

系1.62 $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ のとき、$\{f, H\} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{df}{dt} = 0$ (f は保存量)

(特に $H(q,p)$ は保存量)

命題1.63 (ポアソンの定理) $\dot{f}=0,\ \dot{g}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\{f,g\}=0$

∵ $$\frac{d}{dt}\{f,g\} \overset{1.60}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}}_{\substack{\text{Leibniz} \\ \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}}} + \underbrace{\{\{f,g\},H\}}_{\substack{\text{Jacobi} \\ \{\{f,H\},g\}+\{f,\{g,H\}\}}} \overset{1.60}{\underset{1.59(ii)}{=}} \left\{\underbrace{\frac{df}{dt}}_{=0},g\right\}+\left\{f,\underbrace{\frac{dg}{dt}}_{=0}\right\} = 0 \quad \blacksquare$$

注1.64 $\frac{d}{dt}$ と $\frac{\partial}{\partial q^i}$ or $\frac{\partial}{\partial p_i}$ とは可換でない (cf $\frac{\partial}{\partial t}$ と $\frac{\partial}{\partial q^i}$, $\frac{\partial}{\partial p_i}$ とは可換)

実際 $$\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\frac{d}{dt}-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q^i}\right)f(q,p,t) = \left\{f,\frac{\partial H}{\partial q^i}\right\}$$ ← 宿題1 これを示せ

例1.65 $\{L_1,L_2\}=L_3$ (角運動量の成分) (宿題2は NUCTの課題ページ参照)

注1.66 ある保存量のセット $\{Q_1,\cdots Q_M\}$ があって、$\langle Q_1,\cdots,Q_M\rangle$ は ポアソン括弧を積とするリー代数をなす.

線形空間であって命題1.59 (i)~(iii) をみたす積 $\{,\}$ が定義されたもの

(詳しくはレポート)

$\{Q_i,Q_j\}=C_{ij}{}^k Q_k$ 　$C_{ij}{}^k$: 構造定数

例1.67 (ケプラー運動)

$E<0$ とする. $\vec{L}$, $\vec{M}:=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\vec{A}$ 　$\vec{A}$: レンツ・ベクトル

$$\{L_i,L_j\}=\epsilon_{ij}{}^k L_k$$
$$\{M_i,L_j\}=\epsilon_{ij}{}^k M_k$$
$$\{M_i,M_j\}=\epsilon_{ij}{}^k L_k$$

$$\xrightarrow{B_i^{(\pm)}:=\frac{1}{2}(L_i\pm M_i)}$$

$$\{B_i^{(+)},B_j^{(+)}\}=\epsilon_{ij}{}^k B_k^{(+)}$$
$$\{B_i^{(-)},B_j^{(-)}\}=\epsilon_{ij}{}^k B_k^{(-)}$$
$$\{B_i^{(+)},B_j^{(-)}\}=0$$

← $so(4) \simeq su(2)\oplus su(2)$ →
(と同型)　(と同型)

$\epsilon_{ij}{}^k$: エディントンのイプシロン (完全反対称テンソル): $\epsilon_{ij}{}^k \equiv \epsilon_{ijk}$ で, $\epsilon_{123}=\epsilon_{231}=\epsilon_{312}=+1$, $\epsilon_{132}=\epsilon_{321}=\epsilon_{213}=-1$, 他 $=0$

1.10 可積分系

定義1.68 自由度 n のハミルトン・システム $H(q,p)$ が、互いに

（tを陽に含まない）

ポアソン可換な n 個の保存量 $\Phi_i(q,p)$ を持つとき、完全可積分系という
completely integrable system

定理1.69 (Liouvilleの定理)

完全可積分系は求積法(四則演算,逆関数演算,微分,不定積分)で解ける

注1.70 アーノルドはのちにこの定理を幾何学的に定式化した
(Liouville–Arnoldの定理とも呼ばれる)

(証明の方針)　　　　(詳しくは[大貫・吉田]など)

P21

正準変換(II): $(q,p)\mapsto(Q,P)$ として $P_i \underset{①}{=} \Phi_i$ となるものを考える.
($H \underset{②}{=} \Phi_n$ ととる)

基本ポアソン括弧 $\Rightarrow \{\Phi_i, \Phi_j\} = 0$ (定理の条件)

正準eq. $\Rightarrow \dot{Q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial P_i} \overset{②}{=} \delta^i{}_n$ ← クロネッカーデルタ

$\Rightarrow Q^i = \delta^i{}_n t + \text{const.}$

母関数 W_2 は①から $\left(p_i = \dfrac{\partial W_2}{\partial q^i}\text{ をみたすよう}\right)$ 構成できる.

$Q^i = \dfrac{\partial W_2}{\partial P_i}$ より, Q^i が (q,p) の言葉で表される. ☒

☆ 可積分系 ↔ 多くの保存量 ↔ 高い対称性

cf. ソリトンの佐藤理論:　　cf.[村瀬元彦 in 数理科学別冊「ソリトン」]

ソリトン方程式 ↔ ∞個の保存量 ↔ ∞次元の対称性

(KP eq. KdV eq. など) ← 無限自由度

§2 特殊相対性理論

2.1 電磁場の古典論

4次元時空 $(t, \vec{x})$ を考える
　　　　　時間　空間

← 電荷・電流の源以外、物質がない(真空)

法則2.1 (「真空中の」マクスウェル方程式) [ガウス単位系]

電場 $\vec{E}(t,\vec{x})$ と 磁場 $\vec{B}(t,\vec{x})$ に関する基本法則

「磁束密度」in [SI単位系]

$$
(M)\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho & \cdots ① \\
\nabla\cdot\vec{B} = 0 & \cdots ② \\
\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \cdots ③ \\
\nabla\times\vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \cdots ④
\end{cases}
$$

$\rho(t,\vec{x})$: 電荷密度

$\vec{j}(t,\vec{x})$: 電流密度

$c \fallingdotseq 3.0\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$ (光速度) $= \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

注2.2 ・物質中ではもう少し複雑　・$\vec{E}$と$\vec{B}$は対称的 $\left(\begin{array}{l}\rho=0,\ \vec{j}=\vec{0}:\\ \vec{E}\to-\vec{B}\\ \vec{B}\to\vec{E}\end{array}\text{で(M)不変}\right)$

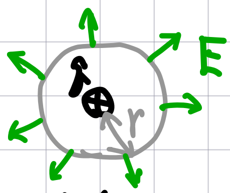
・単位系を変えると係数・呼び名が変わる([SI単位系]など)

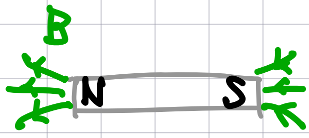
命題2.3
$$
\begin{cases}
② : \nabla\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow {}^{\exists}\vec{A}(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{B}=\nabla\times\vec{A} \\
③ : \nabla\times\left(\vec{E}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\vec{0} \Rightarrow {}^{\exists}\phi(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{E}=-\nabla\phi-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}
\end{cases}
$$

∵ ポアンカレの補題(ただし領域の単連結性は仮定) ☒

注2.4 (物理的意味)

①: ガウスの法則　$E = k\dfrac{q}{r^2}$



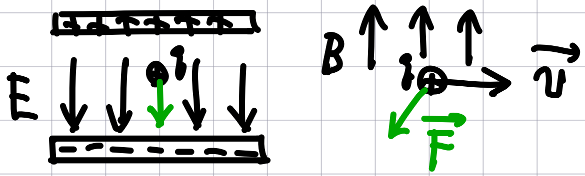


②: モノポール(N極 or S極のみ)の非存在

③: ファラデーの電磁誘導の法則 etc　④: ビオ・サバールの法則 etc.

法則2.5 (荷電粒子 q が背景電磁場から受ける力)

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) \cdots ⑤$$ ローレンツ力



2.2 方程式の対称性

(N) ニュートンの運動方程式 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

方程式を不変に保つ(時空の)座標変換を考える

まず $\vec{F} = \vec{0}$ の状況で考える ← 時空そのものの性質が反映

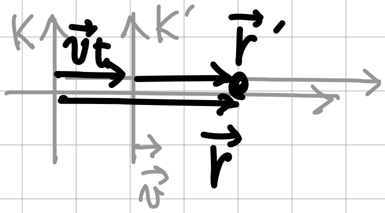
Galilei Boost (G.B.)

定義2.6 (ガリレイ変換) := (3次元回転)+(ガリレイ・ブースト)+(平行移動)

$\vec{r}' = R(\theta)\vec{r}$ $\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \text{ (絶対時間)} \end{cases}$ $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$

広義には(3次元直交変換) 回転&折り返し

$(\theta, \vec{v}, \vec{a}$ は定数)



直観的な慣性系間の座標変換

定理2.7 ガリレイ変換の下、

m が不変であれば($\vec{F} = \vec{0}$ の)(N)は不変

∵ ラグランジュ形式で考える。($L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$) ← $U = 0$

回転: $L' = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}'^2 = \frac{m}{2}{}^t\dot{\vec{r}}'\dot{\vec{r}}' = \frac{m}{2}{}^t\dot{\vec{r}}\,\underbrace{{}^tR(\theta)R(\theta)}_{=1}\dot{\vec{r}} = L$

1×3 3×1

G.B.: $L' = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}} - \vec{v})^2 = L + \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2 t - m\vec{r}\cdot\vec{v}\right)$: 準不変 ▨

※ ポテンシャル U は、ガリレイ変換の下 (N) が不変となるよう定められる (要請)

命題2.8 ガリレイ変換全体は群をなす (ガリレイ群)

(M) マクスウェルの方程式

時空そのものの性質をみる

まず $\rho=0,\ \vec{j}=\vec{0}$ の状況を考える。 $\left(\nabla\times(\nabla\times\vec{v})=\nabla(\nabla\cdot\vec{v})-\Delta\vec{v}\right.$ を用いてよい $\left.\right)$

<u>命題2.9</u> このとき、$\vec{E}$ と $\vec{B}$ は波動方程式をみたす 宿題 これを示せ ($\vec{E}$ か $\vec{B}$ かでよい)

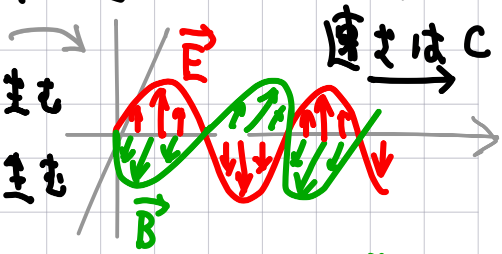
(W) $(-\partial_0^2+\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)\vec{E}=\vec{0}$ or $\vec{B}$ この解を電磁波(光)という

$\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$,

$x^0 := ct$, $\mu\in\{0,1,2,3\}$

(③: $\vec{B}\rightsquigarrow\vec{E}$ を生む

④: $\vec{E}\rightsquigarrow\vec{B}$ を生む



簡単のため空間1次元で考える $\underbrace{\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}}_{=(\partial_0^2-\partial_1^2)}$

$$\begin{cases} \mathrm{ch}\,x \equiv \cosh x := \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \mathrm{sh}\,x \equiv \sinh x := \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{cases}$$

<u>命題2.10</u> 1次元波動 eq. $(\partial_0^2-\partial_1^2)f(x^0,x^1)=0$ は以下の変換の下、不変

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\theta & \mathrm{sh}\,\theta \\ \mathrm{sh}\,\theta & \mathrm{ch}\,\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

∵ $\mathrm{ch}^2\theta-\mathrm{sh}^2\theta=1$ と連鎖律 ■

cf. 1次元ラプラス eq. $(\partial_0^2+\partial_1^2)f(x^0,x^1)=0$ は以下の変換の下不変

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

∵ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 〃 ■

Lorentz Boost (L.B.)

<u>定義2.11</u> (ローレンツ変換) = (3次元回転) + (ローレンツ・ブースト)

広義には (3次元直交変換)

$$(\mathrm{L.B.})\quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\shortparallel}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$\beta := \dfrac{v}{c}$, $\gamma := \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

<u>注2.12</u>
- $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & -\mathrm{sh}\,\xi \\ -\mathrm{sh}\,\xi & \mathrm{ch}\,\xi \end{pmatrix}$ と書ける ($\mathrm{ch}\,\xi=\gamma,\ \mathrm{sh}\,\xi=\beta\gamma,\ \tanh\xi=\beta$)　$\tanh\xi = \dfrac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi}$
- $\beta=\dfrac{v}{c}\to 0$ で (L.B.) → (G.B.)

<u>定理2.13</u> ローレンツ変換の下、(W)は不変

命題2.14 ローレンツ変換全体は群をなす(ローレンツ群)

定義2.15 物理の基本方程式が誰から見ても同一であるべし
という哲学を「相対性原理」と呼ぶ

(例) 古典力学はどの慣性系から見ても同一である (ガリレイの相対性原理)
(⇔ (N) はガリレイ変換の下.不変)

注2.16
- (W) はガリレイ変換で形が変わる ⇒ (M) もしかり
- (N) はローレンツ変換 〃

〈まとめ〉

	古典力学	電磁気学
ガリレイ変換	不変	×
ローレンツ変換	×	不変

両立しない!? ⇝ アインシュタインの登場(来週)

'22 6/24

2.2 特殊相対性理論

基本原理 2.17 (アインシュタイン, 1905)

(I) 物理法則はどの慣性系においても同一である(特殊相対性原理)

(II) 光速はどの慣性系においても一定の値 c をとる(光速不変の原理)

定義 2.18 2.17に基づく理論を特殊相対論 or 相対論的理論という

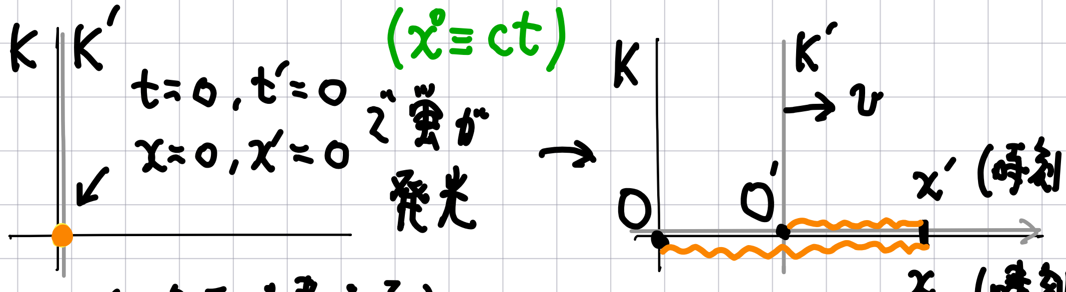
注 2.19 ・(II)の根拠：命題2.10 & マイケルソン・モーレーの実験(1887)

・慣性系同士の座標変換はガリレイ変換ではなくローレンツ変換

((N)は2.17をみたすように修正される＝相対論的力学)

命題 2.20 $S^2 := -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ は慣性系によらない不変量

☺ ($x^0 \equiv ct$)



(1次元で考える)

$(ct')^2 = (x')^2$

$(ct)^2 = x^2$

$$-(ct')^2 + x'^2 = -(ct)^2 + x^2 \ (=0) \ ▨$$

命題 2.21 (速度の合成則：1次元)

$\Lambda(v)$：(L.B)とする。(cf. 2.11)

$$\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \Lambda(V), \quad ただし\ V = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

($0 < v_1, v_2 < c$ のとき $V < c$) 宿題 ← これを示せ

☺ $$\mathrm{LHS} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi_1 & -\mathrm{sh}\,\xi_1 \\ -\mathrm{sh}\,\xi_1 & \mathrm{ch}\,\xi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi_2 & -\mathrm{sh}\,\xi_2 \\ -\mathrm{sh}\,\xi_2 & \mathrm{ch}\,\xi_2 \end{pmatrix} \underset{加法定理}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\xi_1+\xi_2) & -\mathrm{sh}(\xi_1+\xi_2) \\ -\mathrm{sh}(\xi_1+\xi_2) & \mathrm{ch}(\xi_1+\xi_2) \end{pmatrix}$$

$$\tanh(\xi_1+\xi_2) = \frac{\tanh\xi_1 + \tanh\xi_2}{1+\tanh\xi_1\tanh\xi_2} = \frac{\frac{v_1}{c}+\frac{v_2}{c}}{1+\frac{v_1}{c}\frac{v_2}{c}} \equiv \frac{V}{c}$$

V 合成速度 ▨

$\left(\tanh\xi_i = \frac{v_i}{c}\right)$

・ミンコフスキー・ダイヤグラムによる図示(1次元)

(L.B.) $\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \cdots (*)$

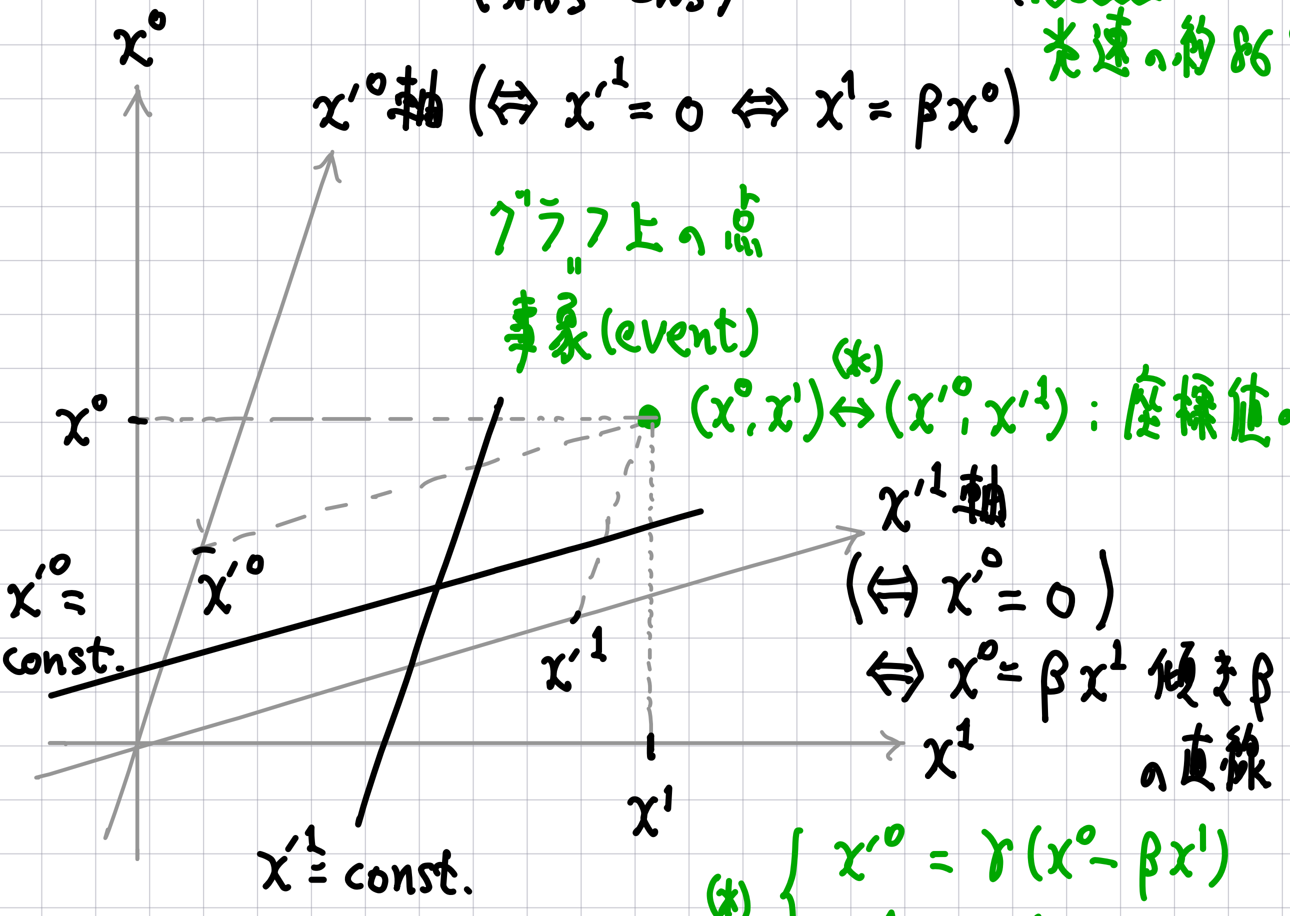
$\beta = \dfrac{v}{c}, \ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\tanh\xi := \dfrac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi} = \beta$

$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & -\mathrm{sh}\,\xi \\ -\mathrm{sh}\,\xi & \mathrm{ch}\,\xi \end{pmatrix}$

$\left(\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき } \gamma = 2\right)$

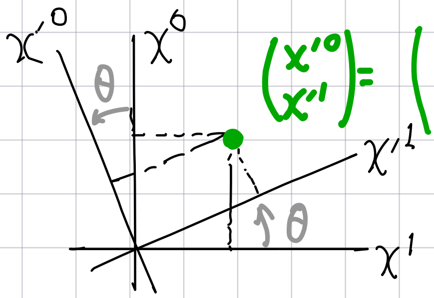
光速の約86%



$(x^0, x^1) \overset{(*)}{\leftrightarrow} (x'^0, x'^1)$:座標値の対応関係

$(*) \begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \end{cases}$

cf. ユークリッド空間での角度θの回転



$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$:座標値の対応関係

x'^1軸 $\Leftrightarrow x'^0 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta \cdot x^0 - \sin\theta \cdot x^1 = 0$

$\Leftrightarrow x^0 = \tan\theta \cdot x^1$

〈簡単な帰結〉

(i) 時間の遅れ

$x'^1=0$ にK'の時計があり、時刻t'を指している

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \end{cases} \quad (*)$$

K'系：$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix}$ とする

これをK系から見ると $\Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} \underset{ct}{x^0} \\ x^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\Lambda^{-1}}_{=\begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma \\ +\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' \\ \beta\gamma ct' \end{pmatrix}$$

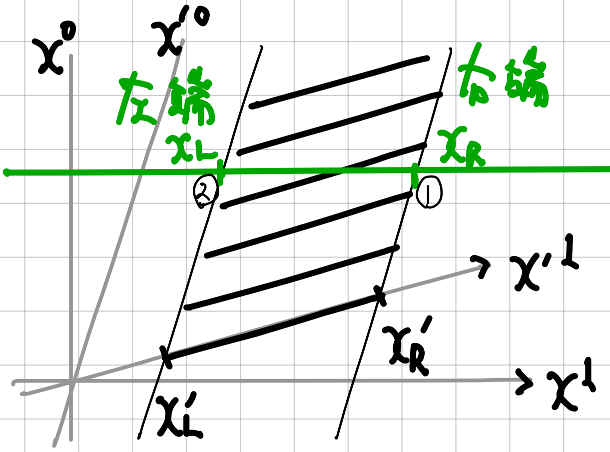
$$\therefore t = \gamma t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t'$$ ← 1より大！

例えば $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　$t'=1 \leftrightarrow t=2$

K'の"1時"は　Kの"2時"

(KからK'の時計を見ると、ゆっくり進んでいる!?)

(ii) 長さの「短縮」



長さ ℓ の棒がK系に対して等速運動（左図）

あるx°で $= x_L^0 = x_R^0$

⇔ $x'_R - x'_L = \ell$

㊟ 棒の長さとは同じ時刻における両端の座標値の差

K系での棒の長さとはKにおける同時刻での両端の座標値の差

① $x'_R = \gamma(-\beta x_R^0 + x_R)$

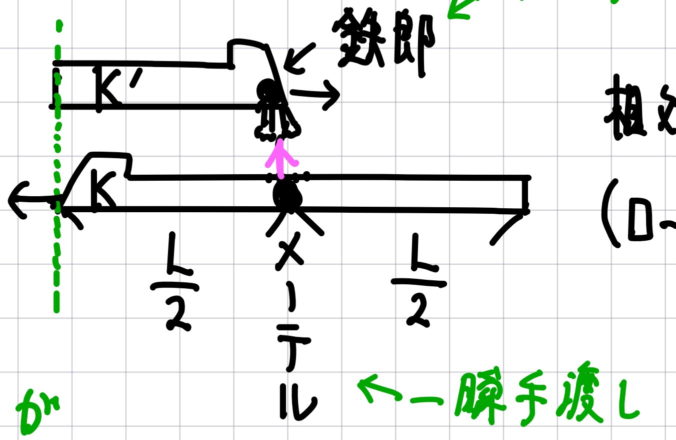
② $x'_L = \gamma(-\beta x_L^0 + x_L)$

$x_R^0 = x_L^0$

辺々引くと $\underbrace{x'_R - x'_L}_{\ell} = \gamma(x_R - x_L)$　$\therefore x_R - x_L = \frac{1}{\gamma}\ell$

棒が「縮んだ」⇔ 1より小

同じ長さんの銀河鉄道



相対速度 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

(ローレンツ短縮により長さ半分)

⇓

図の位置でOK!(受けとれる)

Kの先頭が

K'の尾に一致した瞬間にメーテルから桃を手渡す作戦

と・こ・ろ・が、K'から見るとKの方が縮んでいる(受けとれない??) 矛盾??

※「桃」は他のものでも構わない

2.4 物理法則の相対論的定式化

座標変換 $x' = \Lambda x$ …(*) で良いふるまいをする量をdefしたい

定義2.22 (*)の下 (行~列)

$v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu$ と変換する量を反変vector ← x^μと同じ変換性

$v'_\mu = ({}^t\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu v_\nu$ 〃 共変vector

という }双対

νについて和

$\left(= v_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\right)$ 行と列を入れかえた(転置)

Λ 行 列 上つき(反変成分) 下つき(共変成分)

例2.23 $\begin{cases} dx^\mu : \text{反変vector} \\ \partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} : \text{共変vector} \end{cases}$

命題2.24 $(\text{共変})_\mu (\text{反変})^\mu$ という量は(*)の変換の下、不変

μについて和

☺ $(\text{共変})_\mu (\text{反変})^\mu \overset{(*)}{\longmapsto} (\text{共変})_\nu \underbrace{(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho}_{\delta^\nu{}_\rho} (\text{反変})^\rho = (\text{共変})_\mu (\text{反変})^\mu$ ▨

和の記号が変わらないよう注意

注 $v^\mu \in V$ のとき $v_\mu \in V^*$ Vの双対空間

∘ V^*をVの内積を用いて構成

まず $V = (\mathbb{R}^n, \langle\, | \,\rangle)$ とする 標準内積(⇔ユークリッド空間)

$$\begin{array}{c} \rotatebox{90}{$\in$} \\ x = e_i\, x^i \end{array}$$

基底 成分

$(\cdots\cdots)$ $\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$g_{ij} := \langle e_i | e_j \rangle$ を計量(metric)と呼ぶ　対称 $(g_{ij} = g_{ji})$

双対空間 V^*を $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ として構成 ← V上の一次形式(線形写像$V \to \mathbb{R}$)

V^*の基底 f^i を $f^i(e_k) = \delta^i{}_k$ で定めたい

$$f^i(e_k) := \langle (g^{-1})^{ij} e_j | e_k \rangle = (g^{-1})^{ij} \overbrace{\langle e_j | e_k \rangle}^{g_{jk}} = \delta^i{}_k \text{ でOK}$$

<u>Fact</u> $V^* = \langle \underbrace{f^1, \dots, f^n}_{\text{双対基底}} \rangle_{\mathbb{R}}$, $(V^*)^* \simeq V$

$$\langle f^i | f^j \rangle := \langle (g^{-1})^{ik} e_k | (g^{-1})^{jl} e_l \rangle = (g^{-1})^{ik} \overbrace{(g^{-1})^{jl} g_{kl}}^{\delta^j{}_k} = (g^{-1})^{ij}$$

V^*の内積

※以後 $g^{ij} := (g^{-1})^{ij}$ と略記 $(g^{ik} g_{kj} = \delta^i{}_j)$

・Vの基底変換を考える

$$e_i' = e_j (R^{-1})^j{}_i \quad (= ({}^tR^{-1})_i{}^j e_j)$$

$$x = e_i' x'^i = e_j (R^{-1})^j{}_i x'^i = e_j x^j \quad \therefore x'^i = R^i{}_j x^j$$

V^*では $f'^i = g'^{ij} e_j' \underset{\uparrow}{=} R^i{}_k \underbrace{R^j{}_l \, g^{kl} e_m (R^{-1})^m{}_j}_{\delta_l{}^m} = R^i{}_k \overbrace{g^{kl} e_l}^{f^k}$

$$g'_{ij} = \langle e_i' | e_j' \rangle = g_{kl} (R^{-1})^k{}_i (R^{-1})^l{}_j \quad \cdots (**)$$

宿題 $x_i := g_{ij} x^j$ という量は(この基底変換で)どのように変換されるか?

・内積を不変に保つ変換を考える.(i.e. $g'_{ij} = g_{ij}$)　(答)

上の(**)式より、 プライムなしと同じ

$$({}^tR)_i{}^k g'_{kl} R^l{}_j = g_{ij} \Leftrightarrow {}^tR g R = g$$

$$x_i' = g'_{ij} x'^j = g_{kl} (R^{-1})^k{}_i \overbrace{(R^{-1})^l{}_j R^j{}_m}^{\delta^l{}_m} x^m = g_{kl} (R^{-1})^k{}_i x^l = x_k (R^{-1})^k{}_i$$

共変ベクトル

e_i : 正規直交基底 $\Rightarrow g_{ij} = \delta_{ij}$ (ユークリッド計量)

$\Rightarrow {}^tR R = 1$ (R:直交行列)

注 ユークリッドでは ${}^tR = R^{-1}$ より"共変=反変" (⇔"下つき添字=上つき添字")

・ここから $V = (\mathbb{R}^{1,3}, \text{“}\langle\ |\ \rangle\text{”})$ に戻る　　$(x^0 \equiv ct)$

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$ ：ローレンツ不変（命題2.20）

$$= {}^t x \eta \underset{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{x}} \overset{(*)}{\longmapsto} {}^t x \underbrace{{}^t\Lambda \eta \Lambda}_{\substack{\shortparallel \\ \eta}} x \qquad \eta := \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

正定値性なし

← これをみたす Λ 全体 ＝広義ローレンツ群

<u>定義2.25</u> 座標変換が広義ローレンツ群に従い、計量 $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ をもつ4次元空間をミンコフスキー空間という　ミンコフスキー計量

<u>注2.26</u>　$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-x_0, x_1, x_2, x_3)$

添字の上げ下げ　　時間成分の上げ下げで符号が出る

<u>定義2.27</u> (tensor)

$$\overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{p\text{コ}} \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{q\text{コ}}$$ tensor積

座標変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ で以下のように変換する量 $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ を p 階反変 q 階共変（(p,q) 型）tensor という。

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p} ({}^t\Lambda^{-1})_{\nu_1}{}^{\sigma_1} \cdots ({}^t\Lambda^{-1})_{\nu_q}{}^{\sigma_q} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q}$$

特に $p = q = 0$ のとき T は scalar といい、$T' = T$

〈tensorの演算〉（詳しくは［風間］5章）

(i) 添字の上げ下げ（共変⇔反変）　例　$\eta_{\mu\nu} A^\nu{}_\rho = A_{\mu\rho}$　　$(1,1) \to (0,2)$

(ii) 添字の縮約　例　$A^{\mu\nu}{}_\nu = B^\mu,\ A^\mu B_\mu = C$　←「V^*, V 間でTrがとられている」

$V^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(V, V)$

cf.［横沼］

(iii) tensorの微分　例　$\partial_\mu A(x) = B_\mu(x)$

$(\partial^\mu := \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$ ：反変）

例 2.28 (Lorentz scalar)

物体とともに動く時計の示す時間

(i) $s^2 = x_\mu x^\mu = -(ct)^2 + \vec{x}^2$

$(cd\tau)^2 = -dx_\mu dx^\mu = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$

(ii) 無限小の固有時間間隔 $d\tau := \sqrt{-dx_\mu dx^\mu} = dt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma}dt$

(iii) $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ ($|\det\Lambda| = 1$)

$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$

ダランベルシアン

(iv) $\Box := \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_0^2 + \underbrace{\partial_{\vec{x}}^2}_{\text{ラプラシアン}}$ (cf. P27 (W))

例 2.29 (Lorentz vector)

$\beta := \frac{v}{c}$

(i) 4元速度 $u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} \left(= \gamma(\overset{\text{時間成分}}{c}, \overset{\text{空間成分}}{\vec{v}})\right)$ … ①

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$u_\mu u^\mu = -\gamma^2(c^2 - v^2) = -c^2$ (一定) … ②

(ii) 4元運動量 $p^\mu := m u^\mu \overset{①}{=} (\underbrace{m\gamma c}_{p^0}, \underbrace{m\gamma\vec{v}}_{\vec{p}}) =: \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ … ③

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{|\beta|<1}{\overset{\beta\simeq 0}{=}} \underbrace{mc^2}_{\text{静止エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{非相対論的運動エネルギー}} + O(\beta^4)$$

$$p_\mu p^\mu \underset{③}{=} -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^{\,2} \underset{②\times m^2}{=} -m^2c^2 \quad \cdots ④$$

$\therefore\ E^2 = (c\vec{p})^2 + (mc^2)^2$ … ⑤ (← m=0 のときも実は正しく $E = c|\vec{p}|$)

定理 2.30 $\begin{pmatrix}\text{Lorentz}\\ \text{tensor}\end{pmatrix} = 0$ の式はローレンツ不変

(T‥ と書く)

1/22
7/8

※ 光量子仮説を認めれば、

$E = \hbar\omega = h\nu$

$|\vec{p}| = \hbar|\vec{k}| = \frac{h}{\lambda}$

& $c = \lambda\nu$ より従う

∵ $T^{\cdots}_{\cdot\cdot} = 0$

↓ (※)

$T'^{\cdots}_{\cdot\cdot} = \Lambda\Lambda{}^t\Lambda^{-1}{}^t\Lambda^{-1}\overset{0}{\cancel{T^{\cdots}_{\cdot\cdot}}} = 0$ ∎

例2.31 (相対論的物理法則)

(i) Maxwell eq. : レポート8 & form は大域的 ⇒ $F_{\mu\nu}, A_\mu, j_\mu$: tensor

$$\begin{cases} \partial^\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu & \leftarrow \text{運動方程式} \\ \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 & \leftarrow \text{ビアンキの恒等式} \end{cases}$$

$$J_\mu := \frac{4\pi}{c}(-c\rho, \vec{j}),\quad A_\mu := (-\phi, \vec{A})$$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) 相対論的運動方程式 (ミンコフスキー eq.) ← 0成分 : $\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$ (仕事率)

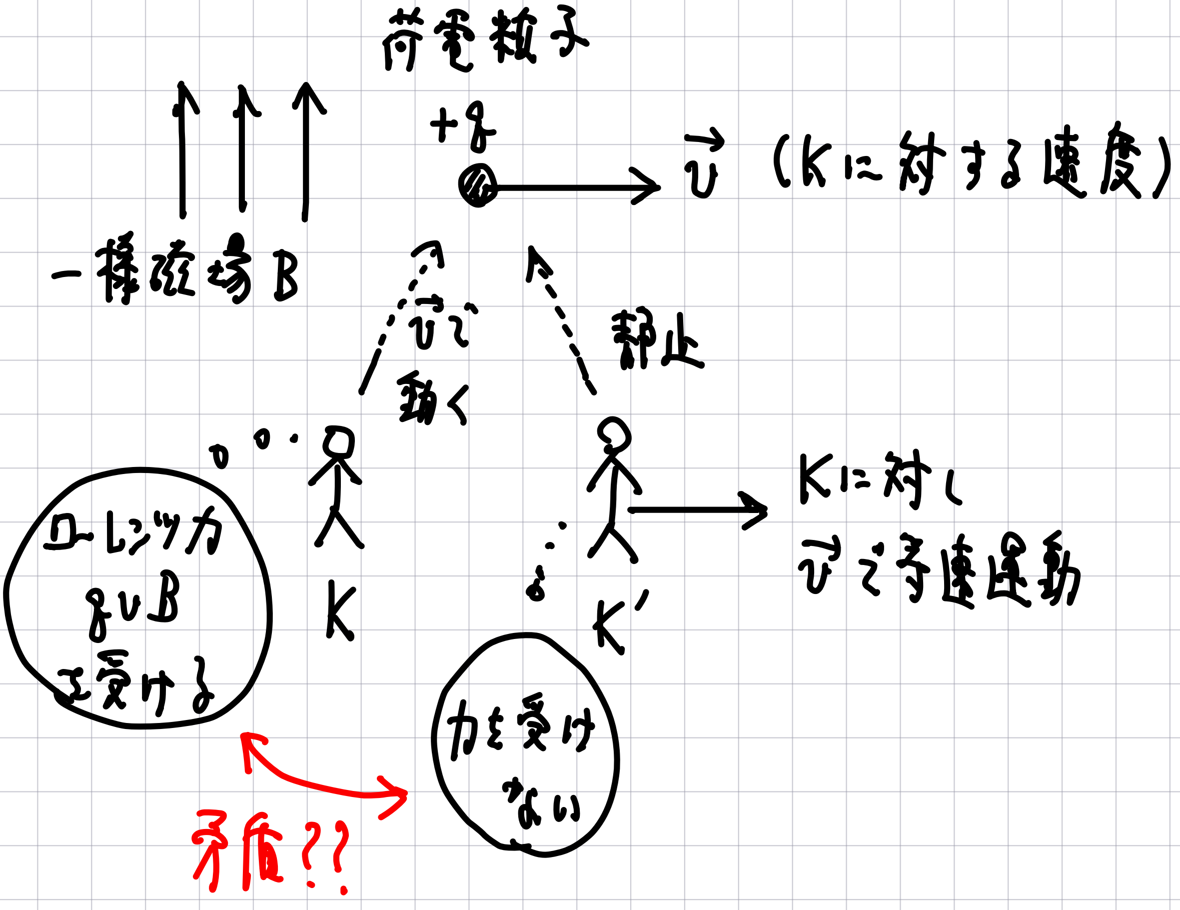
$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \underbrace{K^\mu}_{4元力} := \left(\frac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{f}, \gamma\vec{f}\right) \xrightarrow{\beta=0で} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{f} : \text{Newtonの運動方程式}$$

cf. [山本・中村] 上巻 P561, [米谷]

注 電場・磁場は2階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ ((*)で変換される)

$\vec{E}, \vec{B}$ が変換されないと、以下のパラドックスが生じる

↑ レポート9 (3)



§3 ゲージ理論

3.1 場の理論と変分原理

4次元ミンコフスキー空間上で相対論的場の理論を考える

← 座標 x^0, x^1, x^2, x^3

$$S = \int \underbrace{d^4x}_{=dx^0dx^1dx^2dx^3} \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$$

作用積分　ラグランジアン密度 (Lorentz scalar)

cf. 有限自由度＆非相対論:

$$S = \int dt\, L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

場 $\phi_a = \phi_a(x^0, x^1, x^2, x^3)$ （$x^0 = ct$） $= \phi_a(x)$ と書く

命題 3.1 (Euler-Lagrange eq., or EOM)

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) = 0$$

← (Lorentz tensor) = 0 の式

$$\left(\text{b.c. } \delta\phi_a \Big|_{R\to\infty} = 0 \right)$$ ← 4次元時空での無限遠

☺ 1.22 と同様 $\left(\phi_a(x) = \phi_a^*(x) + \delta\phi_a(x) \right)$ （$\delta\phi_a(x) = \varepsilon \eta_a(x)$） ☒

※ 以後, $c=1$, $\hbar := \frac{h}{2\pi} = 1$ とする. (h はプランク定数)

例 3.2 (実) Klein-Gordon eq. (φ : $\mathbb{R}$値関数)

$$S_\varphi = \int d^4x \, \frac{1}{2} \left(- \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right)$$

$m^2\varphi^2$: 質量項 (2次の項)

$$\text{EOM}: \quad (\partial_\mu \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi) = 0$$

例 3.3 Maxwell eq. (cf. レポート8)

$$S_{EM} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu \overbrace{J^\mu}^{\text{外場}} \right)$$

第一項 → $\frac{1}{2}\int d^4x \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right)$

$$\text{EOM}: \quad \partial^\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu \quad \left(+ \text{ビアンキ恒等式 } dF = 0 \right) = \text{Maxwell eq.}$$

命題3.4 Maxwell eq および S_{EM} は以下の変換の下不変:

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda \quad (\lambda(x):\text{任意の実関数})$$

これを(電磁気学の)ゲージ変換と呼ぶ　(時空の対称性とは独立)

3.2 ゲージ原理

複素scalar場の理論を考える

$$S_\phi = \int d^4x \left(-\partial_\mu \bar{\phi}\, \partial^\mu \phi - m^2 \phi \bar{\phi} \right)$$

虚数単位

$\phi = \varphi_1 + i\varphi_2$ で

それぞれ例3.2の実scalar理論

EOM: $(\underbrace{\partial^2}_{\partial_\mu \partial^\mu} - m^2)\phi = 0$ (複素KG eq.)

命題3.5 これは以下の変換の下不変:

$$\phi \mapsto \phi' = \underbrace{e^{i\theta}}_{U(1)} \phi \qquad \theta:\text{任意の実数}(x\text{によらない})$$

$U(1)$ ⇝ 「大域的 $U(1)$ 対称性をもつ」という

定理3.6 (Weylのゲージ原理, 1929年)

電磁場と場 ϕ が相互作用するシステムは以下のように実現される:

- 微分 ∂_μ を共変微分 (covariant) $D_\mu := \partial_\mu - ieA_\mu$ におきかえる
- 電磁気のゲージ変換3.4を物質場 ϕ に対する以下の変換と合わせて行う

$$\phi \mapsto \phi' = \underbrace{e^{ie\lambda(x)}}_{\text{局所的}U(1)\text{変換}} \phi \qquad (\theta(x) = e\lambda(x))$$

このとき $D_\mu \phi \mapsto D'_\mu \phi' = e^{ie\lambda} D_\mu \phi$　tensorぽいふるまい (covariant)

<u>方言3.7</u> (xに依存しない)大域的対称性を(xに依存する)
局所対称性に拡張することを「ゲージ化」と呼ぶ

<u>例3.8</u> 複素scalar理論S_ϕをゲージ化した作用:

$$S_{\phi,A} = \int d^4x \left(-D_\mu \bar{\phi} D^\mu \phi - m^2 \bar{\phi}\phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

これはU(1)ゲージ変換

$$A_\mu \mapsto A_\mu' = A_\mu + \frac{i}{e} g^{-1}(\partial_\mu g), \quad \phi \mapsto \phi' = g^{-1}\phi \quad \left(g(x) = \underset{\underset{U(1)}{\text{Ш}}}{e^{ie\lambda(x)}} \right)$$

の下、不変。

(ゲージ群$G = U(1)$と言う)

3.3 Yang-Mills理論

$G = U(1)$: abel群(可換群)
↓
$SU(2)$: Non-abel群(非可換群)に拡張

2成分複素scalar場の理論を考える:

dagger(十字架): エルミート共役の記号(物理)

ϕ_1, ϕ_2は共通の質量mをもつ

$$S_\Phi = \int d^4x \left(-\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi \right) \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

<u>命題3.9</u> これは以下の<u>大域的</u>SU(2)対称性をもつ

$$\Phi \mapsto \Phi' = g^{-1}\Phi \qquad g \in SU(2)$$

定数行列(xに<u>よらない</u>)

これを「ゲージ化」したい

(ゲージ変換でΦ, $F_{\mu\nu}$, 微分が「covariant」に変換されるようにしたい)

$A_\mu(x)$: 2×2 エルミート行列 (SU(2)のリー環) とする. (A_μ : ゲージ場という)
「A_μは2×2エルミート行列値関数」ということ

定義 3.10 $D_\mu := \partial_\mu - ieA_\mu$ を共変微分 (e : 結合定数) という
$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$ を場の強さ ← $[A,B] := AB - BA$

定義 3.11 $g(x) \in SU(2)$としたとき, 以下の変換をSU(2)ゲージ変換という

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = g^{-1}A_\mu g + \frac{i}{e} g^{-1}(\partial_\mu g), \quad \Phi \mapsto \Phi' = g^{-1}\Phi$$

命題 3.12 このとき $F_{\mu\nu} \mapsto F'_{\mu\nu} = g^{-1}F_{\mu\nu}g$, $D_\mu\Phi \mapsto D'_\mu\Phi' = g^{-1}D_\mu\Phi$
宿題 これを示せ

定理 3.13 (Yang-Mills, 1954) cf. 内山, パウリ
S_Φをゲージ化した理論は以下で与えられ, SU(2)ゲージ変換の下不変

$$S_{\Phi,A} = \int d^4x \left(-D_\mu\Phi^\dagger D^\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right)$$

2×2行列のトレース

A_μのEOM : $[D_\mu, F^{\mu\nu}] = 0$ (Yang-Mills eq.)

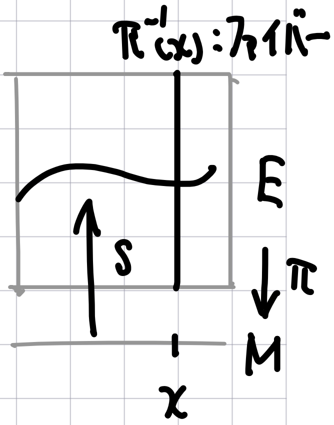
命題 3.14 $D := dx^\mu D_\mu$ (1-form)
$F := \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ (2-form) として $DF = 0$ (恒等式)
(詳しくはレポート)

注 ゲージ群を$G = U(N)$としても同様. $N=1$で電磁気に帰着

注 3.15 ゲージ場A_μの質量項はゼロ ⇝ ヒッグス機構により質量を獲得!
∵ 質量項 $m^2A_\mu A^\mu$ はゲージ不変でない ∎

おまけ：ゲージ理論の物理と数学

物理	数学
ゲージ理論	ファイバー束の理論
ゲージ変換	束自己同型
ゲージ場 A_μ	接続
場の強さ $F_{\mu\nu}$	曲率
ゲージ群 G	構造群
物質場(波動関数) (ヒッグス含む)	束の切断
(A_μだけの)ゲージ理論	主G束
＋物質を含む理論	＋同伴束



〈その後の発展(数学との関わり)〉

1978年　インスタントンのADHM構成法

1982年　モノポールのNahm構成法

1987年　ヒッチン・システム

1982年　Wittenのモース理論

1983~90　Donaldson理論

1994年　Seiberg-Witten理論

Vafa-Witten理論 (& 2005 Kapustin-Witten)

Quiver ゲージ理論

1995年　D-brane革命　　2007 Alday-Gaiotto-Tachikawa対応 …

果てしなく続く

(宿題略解)

$g^{-1}g=1$ の両辺を ∂_μ

↓

$\partial_\mu g^{-1} = -g^{-1}(\partial_\mu g)g^{-1}$

$$D'_\mu \Phi' = (\partial_\mu - ieA'_\mu)\Phi'$$

①とcancel

$$= \left(\partial_\mu - ie\left(g^{-1}A_\mu g + \frac{i}{e}g^{-1}(\partial_\mu g)\right)\right)(g^{-1}\Phi)$$

① ②

$$= g^{-1}(\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi$$

§4 重力理論

4.1 一般相対性理論

基本原理4.1 (Einstein, 1915)

(I) 物理法則はどの座標系においても同一である(一般相対性原理)

(II) 時空の各点の無限小近傍において、特殊相対論が成り立つ座標系が存在する。(等価原理)

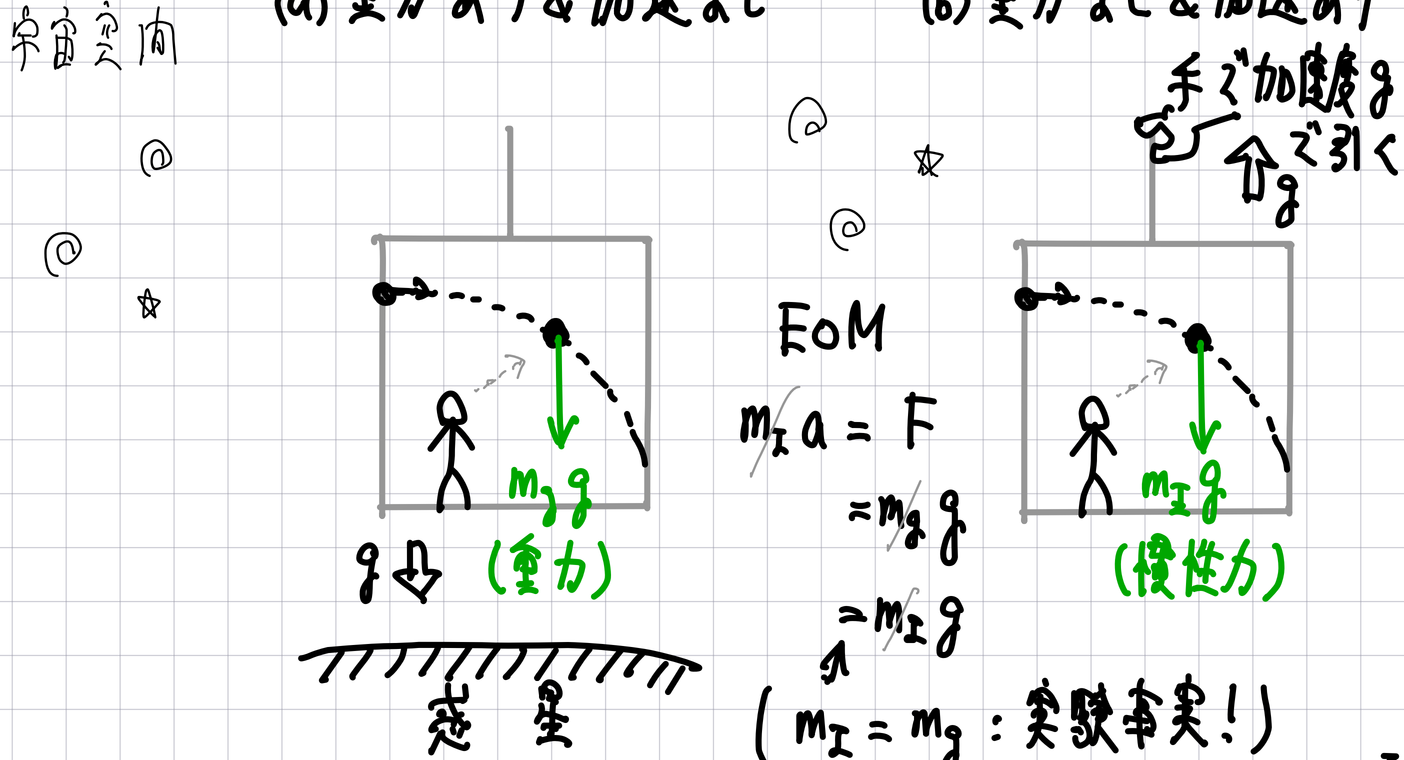
「局所慣性系」

定義4.2 4.1に基づく理論を一般相対論(General Relativity)といい重力の古典論を与える。(プランク・スケールで破綻)

$l_p := \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \fallingdotseq 2\times 10^{-35}\,\mathrm{m}$

注4.3 (II)の根拠: アインシュタインのエレベータ

(a) 重力あり&加速なし　　(b) 重力なし&加速あり



EoM

$$\cancel{m_I} a = F$$
$$= \cancel{m_g} g$$
$$= \cancel{m_I} g$$

($m_I = m_g$: 実験事実!)
by Eötvös, 1890頃

エレベータ内の人には(a)と(b)は区別できない(重力の効果=加速度の効果)

重力の効果はある加速度系で打ち消すことができる

↳ 時空の曲がり具合として表す

4.2 一般座標変換におけるtensor

4.1 (I) ⇒ 任意の座標変換でcovariantな理論を作りたい

一般相対論の舞台 ＝ semi-Riemann多様体 (M, g)　多様体　計量

$$\underbrace{ds^2}_{\text{不変線素}} = \underbrace{g_{\mu\nu}(x)}_{\text{計量tensor (重力場)}} dx^\mu dx^\nu \overset{(\mathrm{II})}{=} \underbrace{\eta_{\mu\nu}(X)}_{= \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}} dX^\mu dX^\nu$$

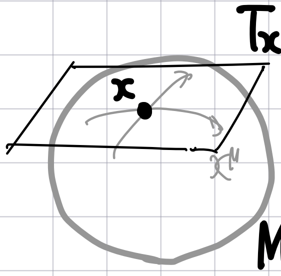
$x^\mu \mapsto {}^\exists X^\mu$　局所慣性系

← $g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu}$ (xによらない) の場合 Minkowski空間

<u>用語4.4</u>

M^n：n次元多様体：局所的に$\mathbb{R}^n$の座標が描ける空間

点$x \in M$における接vector空間



$$T_xM = \left\{ V^\mu(x) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{e_\mu(x)\text{：基底}} \,\middle|\, (x^1, \cdots, x^n) \in M \right\}$$

"速度ベクトル"

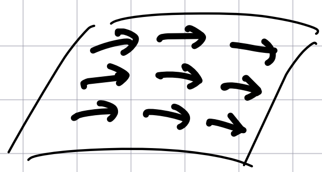
dual ↕　　$g_{\mu\nu}(x) = \langle e_\mu(x) | e_\nu(x) \rangle$

〃　余接vector空間

$$T_x^*M = \left\{ V_\mu^*(x)\, dx^\mu \,\middle|\, 〃 \right\}$$

$\mathfrak{X}(M) = \{M$上の各点xにおいて接vectorに値をとる関数$\}$

M上のvector場



M上の(semi-Riem.)計量：

$x \in M \mapsto g(x)$であり、以下をみたすもの　(正定値性なし)

$T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$

$(X, Y) \mapsto g(X, Y)$

(i) $g(X, Y) = g(Y, X)$

(ii) $g(aX + bY, Z) = a\,g(X, Z) + b\,g(Y, Z)$

(iii) ${}^\forall Y \in T_xM$に対し、$g(X, Y) = 0 \Rightarrow X = 0$

座標変換 $x'^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ … (※) を考え、tensorを定義
(C^∞ & 可逆)　($= x'^\mu(x)$ と書く)

定義4.5 (※)による変換性により、以下のように分類

- 反変 vector

$$v'^\mu = \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}}_{\text{Minkowski } \Lambda^\mu{}_\nu} v^\nu$$

νについて和

← 基底と成分は逆の変換性 (P34)

(例) T_xMの元の成分 v^μ

$\because \underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^\mu}}_{\text{基底(共変)}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ (連鎖律)

- 共変 vector

$$V'_\mu = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}}_{\text{''} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu} V_\nu$$

(例) T_x^*M 〃 V^*_μ

$\because \underbrace{dx'^\mu}_{\text{基底(反変)}} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$ (全微分)

- (p,q)型 tensor

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}$$

(例) ・ $\underbrace{ds^2}_{\text{scalar (不変)}} = g_{\mu\nu}(x)\underbrace{dx^\mu}_{(1,0)}\underbrace{dx^\nu}_{(1,0)} \Rightarrow g_{\mu\nu}$: (0,2)型 tensor

・ 体積要素 $\underbrace{\sqrt{-g}\, \underbrace{dx^0dx^1dx^2dx^3}_{d^4x\text{ と書く}}}_{\text{scalar}}$

← $g := \det g_{\mu\nu}$: 負

$g' = J^{-2} g \quad \therefore g<0$

$g = \left|\begin{matrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{matrix}\right|$　$J^{-1} = \det\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right)$

注4.6 (tensorの演算)

- 添字の上げ下げ (e.g. $g_{\mu\nu}A^\nu = A_\mu$), 縮約などはP35と同様
- ただし tensorの微分は一般にtensorを与えない ⇝ 共変微分の導入

(e.g. $\partial'_\mu V'_\nu(x) = ▨ \cdot \partial_\mu \left(▨(x) \cdot V_\nu(x) \right)$ ▨もたたく)

4.3 共変微分

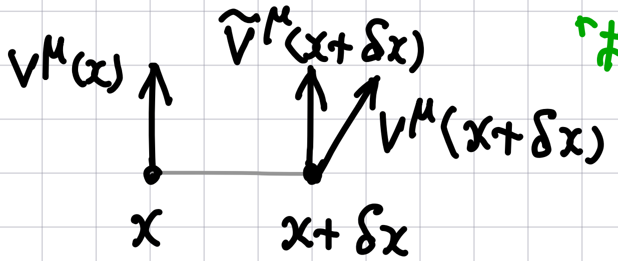
まず直観的に vector の平行移動・共変微分を議論

$V^\mu(x)$: 反変 vector とする　　[ref.] 佐々木節「一般相対論」

δx^μ : 無限小反変 vector として V^μ の無限小平行移動を def:

$$\tilde{V}^\mu(x+\delta x) := V^\mu(x) - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(x)\, V^\nu(x)\, \delta x^\rho \quad \cdots ①$$

「接続(係数)」という



ここで以下の演算子 D を導入:

$$DV^\mu := V^\mu(x+\delta x) - \tilde{V}^\mu(x+\delta x)$$

$$\overset{①}{=} V^\mu(x+\delta x) - V^\mu(x) + \overbrace{\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\nu \delta x^\rho}^{\overset{②}{=}\ \delta V^\mu}$$

δV^μ (普通の微分からのズレ)

$$= \underbrace{\left(\partial_\rho V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\nu\right)}_{\nabla_\rho V^\mu} \delta x^\rho$$

$\nabla_\rho V^\mu$: V^μ の共変微分

← cf. ゲージ理論 $D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + A^a_{\mu b}\varphi^b$

共変とする

$$\Downarrow \quad \delta(\underbrace{V^\mu u_\mu}_{\text{scalar}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta V^\mu u_\mu + V^\mu \delta u_\mu = 0$$

②を代入　　$\forall V^\mu$ で成立

$$Du_\mu = \underbrace{\left(\partial_\rho u_\mu - \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} u_\nu\right)}_{\nabla_\rho u_\mu} \delta x^\rho$$

$\nabla_\rho u_\mu$: u_μ の共変微分

一般のtensorに対する共変微分：　$\delta(V^\mu u_\nu) = \delta V^\mu u_\nu + V^\mu \delta u_\nu$

$$\nabla_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \partial_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} + \sum_{k=1}^{p} \Gamma^{\mu_k}{}_{\sigma_k\rho} T^{\mu_1\cdots\sigma_k\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} - \sum_{l=1}^{q} \Gamma^{\sigma_l}{}_{\nu_l\rho} T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\sigma_l\cdots\nu_q}$$

特に $\nabla_\rho \underset{}{\overset{\text{scalar}}{T}} = \partial_\rho T$

命題4.7 座標変換(※)：$x'^\mu = x'^\mu(x)$ の下、$\nabla_\mu V_\nu$ が $(0,2)$-tensor

$$\Rightarrow \Gamma'^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\Gamma^\kappa{}_{\sigma\tau} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}\underline{\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}}$$

☺レポート

定義4.8 $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ を Christoffel symbol という（tensorではない）

注4.9 $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$ は $(1,2)$型 tensor　（$\equiv 0$ を要請する）

命題4.10 $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$

(計量と両立)

このとき ∇_ρ を Levi-Civita 接続という.

☺　$$0 = \nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \underbrace{\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} g_{\sigma\nu}}_{\Gamma_{\nu,\mu\rho}} - \underbrace{\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}}_{\Gamma_{\mu,\nu\rho}}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\nu g_{\sigma\mu} &= \cancel{\Gamma_{\mu,\sigma\nu}} + \Gamma_{\sigma,\mu\nu} \\
\partial_\mu g_{\nu\sigma} &= \Gamma_{\sigma,\nu\mu} + \cancel{\Gamma_{\nu,\sigma\mu}} \\
+)\ -\partial_\sigma g_{\mu\nu} &= -\cancel{\Gamma_{\nu,\mu\sigma}} - \cancel{\Gamma_{\mu,\nu\sigma}} \\
\hline
&= 2\Gamma_{\sigma,\mu\nu}
\end{aligned}$$

← $g^{\sigma\rho}$ で添字を上げる　▨

定義4.11 (数学のdef)

vector場Yをvector場X方向に微分する操作

(M, g) : semi-Riem. 多様体

$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が以下(i)〜(iii)をみたすとき、
$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ M上のアフィン接続という。
(connection)

(i) bilinear

(ii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X(Y)$

(iii) $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X(Y)$, $f \in C^\infty(M)$

(iv) $X\langle Y|Z\rangle = \langle \nabla_X Y | Z\rangle + \langle Y|\nabla_X Z\rangle$

(v) $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$

さらに(iv),(v)もみたすとき、Levi-Civita接続といい、一意に定まる

$\langle\ |\ \rangle$: 各点における接vector空間の内積

局所的に $g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu | \partial_\nu \rangle$, $\nabla_\mu(\partial_\nu) := \nabla_{\partial_\mu}(\partial_\nu) = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\,\partial_\rho$

これでΓを定める

このとき $\nabla_\rho(X) = \nabla_\rho(X^\nu\partial_\nu) \overset{(ii)}{=} (\partial_\rho X^\nu)\partial_\nu + X^\nu \underbrace{\nabla_\rho(\partial_\nu)}_{\Gamma^\mu{}_{\rho\nu}\partial_\mu} = \underbrace{(\partial_\rho X^\mu + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}X^\nu)}_{\text{一致}}\partial_\mu$

P46の $\nabla_\rho X^\mu$!

命題 $X = \partial_\rho$, $Y = \partial_\mu$, $Z = \partial_\nu$ のとき (iv) ⇒ $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ を示せ

((v)なども用いてよい)

P47の意味です

(答) (iv)より $\partial_\rho \langle \underbrace{\partial_\mu | \partial_\nu}_{g_{\mu\nu}} \rangle = \langle \underbrace{\nabla_\rho \partial_\mu}_{\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}\partial_\sigma} | \partial_\nu \rangle + \langle \partial_\mu | \underbrace{\nabla_\rho \partial_\nu}_{\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu}\partial_\sigma} \rangle = \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} g_{\mu\sigma}$

$\langle\ \rangle$ の外に出せる

(v) (v)

□

4.4 曲率

定義4.12 Levi-Civita接続 ∇ に対して、次で def される (1,3)型 tensor R を Riemann曲率tensor という。

$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

(局所表示) $X = \partial_\rho,\ Y = \partial_\sigma,\ Z = \partial_\nu$ とすると

$$(左辺) = \nabla_\rho(\underbrace{\nabla_\sigma(\partial_\nu)}_{\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}\partial_\mu}) - \nabla_\sigma(\underbrace{\nabla_\rho(\partial_\nu)}_{\Gamma^\mu{}_{\rho\nu}\partial_\mu}) \overset{(ii)}{=} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\,\partial_\mu$$

P41 の cf. $F_{\mu\nu}$

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} := \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\rho\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}$$

命題4.13 (i) Ricciの恒等式: $\nabla_\mu\nabla_\nu V_\rho - \nabla_\nu\nabla_\mu V_\rho = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} V_\sigma$

(ii) cyclic 〃 : $R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} + R^\sigma{}_{\nu\rho\mu} + R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = 0$

(iii) Bianchi 〃 : $\nabla_\mu R^\tau{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\tau{}_{\sigma\rho\mu} + \nabla_\rho R^\tau{}_{\sigma\mu\nu} = 0$

∵ tensorの関係式なので局所慣性系($\forall\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = 0$)で証明すれば より ☒

↑ $\partial\Gamma$ は $\neq 0$

定義4.14 ◦ Ricci曲率 $R_{\mu\nu} := R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$

◦ Scalar曲率 $R := R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ (scalar!)

例4.15 (2次元球面)

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ 極座標 & $r = a$

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

$$g_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \theta & \varphi \end{array} \\ & \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{array}{c} \theta \\ \varphi \end{array} \end{array},\quad \underset{逆行列}{g^{ij}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2\sin^2\theta} \end{pmatrix},\quad \underset{行列式}{g = a^4\sin^2\theta}$$

$\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,\quad \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \cot\theta,\quad 他 = 0$

$R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = \sin^2\theta,\quad R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta} = 1$

cf. $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ (λ: 定数) のとき

$R_{\theta\theta} = 1,\ R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta\ \left(\Rightarrow R_{ij} = \frac{1}{a^2} g_{ij}\right)$ M を Einstein多様体という

$R = \frac{2}{a^2}$ (半径 a 大 ⇔ 曲率小)

'22 7/29

4.5 アインシュタイン方程式

最小作用の原理から Einstein eq. を導く

定義 4.16 一般座標変換の下不変な作用積分を以下で def:

$$S = S_g + S_m$$

$\mathcal{L}_g$ (重力の情報): $g_{\mu\nu}(x)$ の汎関数

$$S_g := \frac{-c^3}{16\pi G}\int \underbrace{R\sqrt{-g}\,d^4x}_{\text{scalar (P45)}} \quad : \text{Hilbert action}$$

G: 重力定数

$$S_m := \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_m\sqrt{-g}\,d^4x$$

$\mathcal{L}_m$: 物質の情報 (場の分布など): input

定義 4.17 エネルギー運動量 tensor $T_{\mu\nu}$ を以下で定める:

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x$$

定理 4.18 $\delta S = 0$ は次の EOM を与える:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad : \text{Einstein eq.}$$

(時空が曲がる) ⟵ (物質分布)

⇕

重力

(証) $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$

$$\delta R = \delta R_{\mu\nu}\,g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$$

表面積分となる (問13 (5))

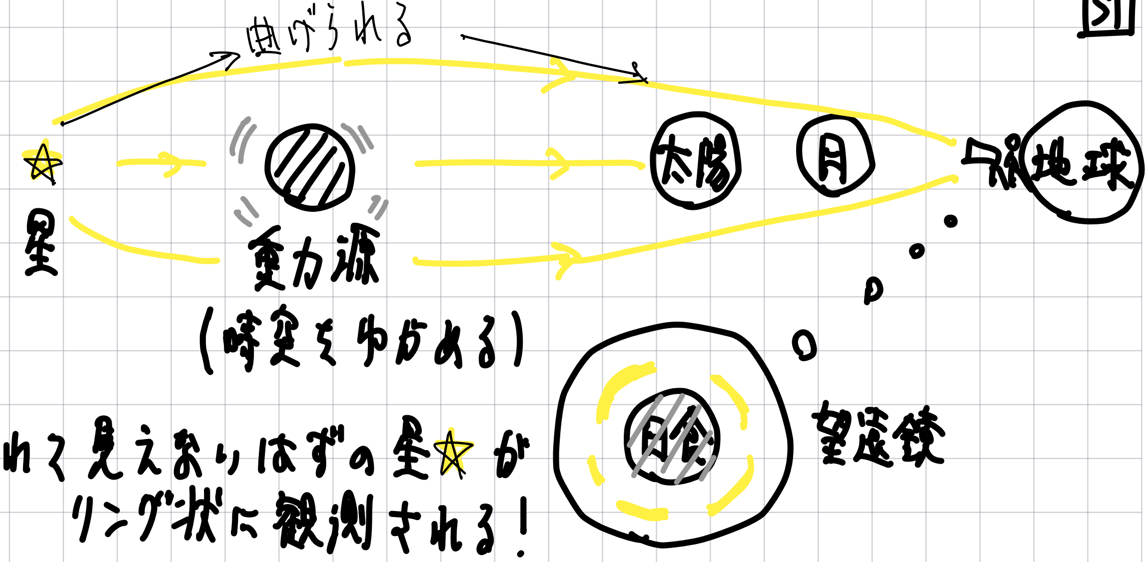
$\delta g = g\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$ (レポート問13 (1))

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$$

$$\therefore\ \delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x \qquad ▨$$

予言4.19

・重力レンズ



太陽・月に隠れて見えないはずの星☆が
リング状に観測される！

有名な検証 (1919年5月29日(皆既日食)の観測 by Eddington) ↘ 全世界の一面記事を飾る！

・水星の近日点移動

・ブラックホール (星の自己重力崩壊)

・重力波 (GW150914：初観測！)

・重力による時間の遅れ ⤳ GPS, 光格子時計

注4.20 $\mathcal{L}_g = R^1 + \underbrace{R^0}_{\text{定数}} + f(R)$ のように一般化できる

↳ $f(R)$-gravity (cf. 野尻伸一さん, …)

宿題1 $\mathcal{L}_g = R - 2\Lambda$ のとき、$\delta S = 0$ の与える EoM を書き下せ (Λ: 定数)

(答) $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

Λ: 宇宙定数 (とても重要)

4.6 ブラックホール

定理4.21 (Schwarzschild解, 1916年)

以下の計量は原点を除く領域での Einstein eq. の厳密解：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

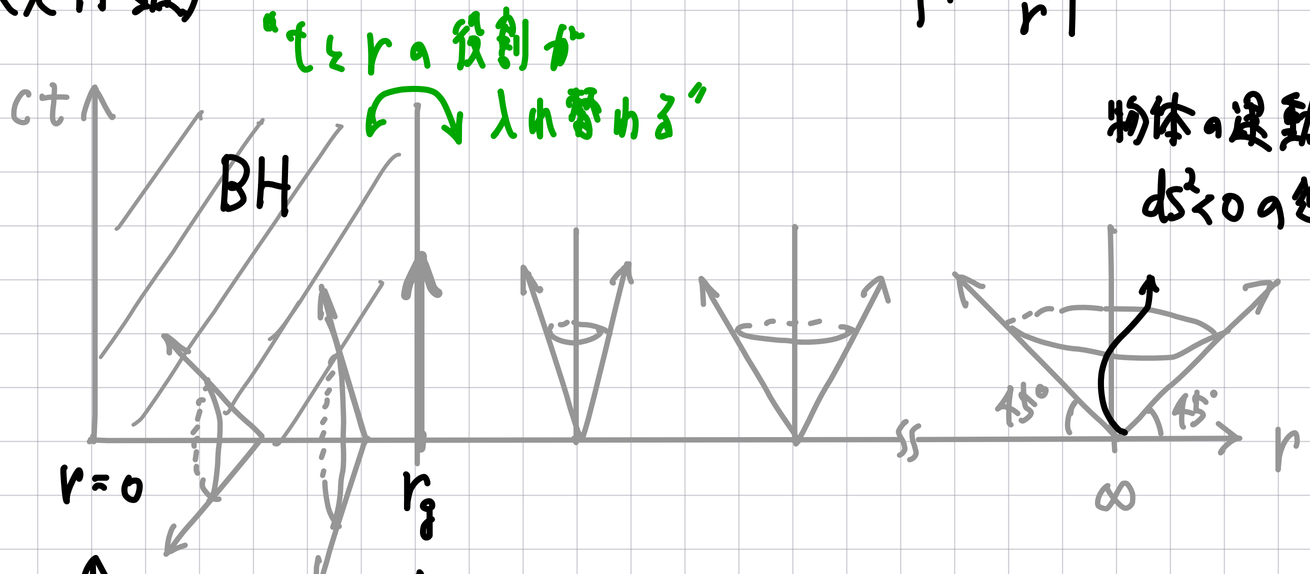
$r_g := \frac{2GM}{c^2}$ を Schwarzschild 半径という (太陽で $r_g \fallingdotseq 3\text{km}$)

注4.22　$r<r_g$ の領域では光も含めてすべての軌道がその領域内におさまる.

(このような領域を Black Hole (BH) という)

光の軌道 ⇔ $ds^2=0$ ⇒ $\dfrac{c\,dt}{dr} = \pm\dfrac{1}{\left|1-\frac{r_g}{r}\right|}$

(光円錐)



曲率特異点

曲率は発散しない
(見かけの特異点)

$r=r_g$ (BHの"表面")を事象の地平線という
(event horizon)

注4.23　(4次元のBH)

- Reissner-Nordström解 (M, Q)　← 電荷
  1917頃
- Kerr解 (M, J)　← 角運動量
  1963
- Kerr-Newman解 (M, J, Q)
  1965

―― あとはスライド ――