4.5 アインシュタイン方程式

最小作用の原理からEinstein eq.を導く

定義4.16 一般座標変換の下不変な作用積分を以下でdef:

$$S = S_g + S_m$$

$\mathcal{L}_g$ (重力の情報): $g_{\mu\nu}(x)$の汎関数

$$S_g := \frac{-c^3}{16\pi G}\int \underbrace{R\sqrt{-g}\,d^4x}_{\text{scalar (P45)}} \quad : \text{Hilbert action}$$

$$S_m := \frac{1}{c}\int \underbrace{\mathcal{L}_m}_{\text{物質の情報(場の分布など): input}}\sqrt{-g}\,d^4x$$

G: 重力定数

定義4.17 エネルギー運動量tensor $T_{\mu\nu}$を以下で定める:

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x$$

定理4.18 $\delta S = 0$ は次のEOMを与える:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad : \text{Einstein eq.}$$

(時空が曲がる) ⟵ (物質分布)

⇕

重力

∵ $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$

表面積分となる(問13(5))

$$\delta R = \delta R_{\mu\nu}\,g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$$

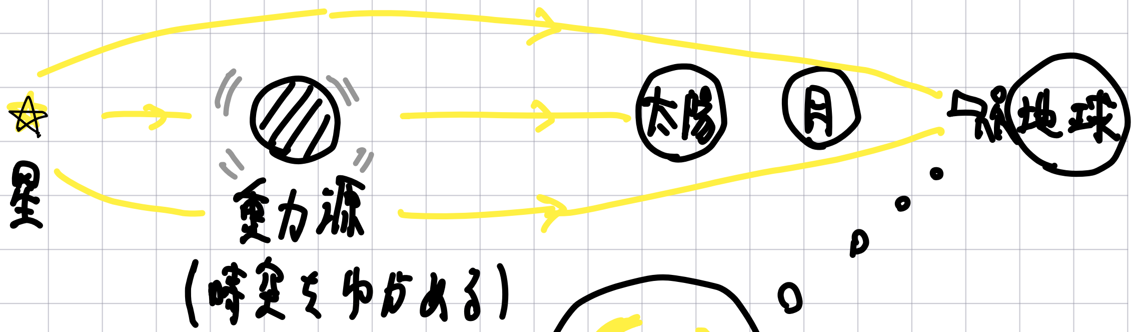
$\delta g = g\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$ (レポート問13(1))

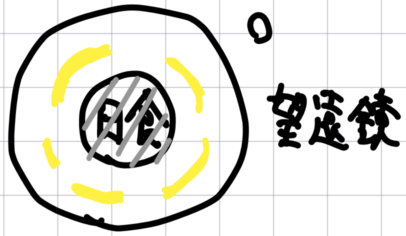
$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$$

$$\therefore \delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x \qquad \blacksquare$$

予言4.19

・重力レンズ





太陽・月に隠れて見えないはずの星☆が
リング状に観測される！

有名な検証（1919年5月29日（皆既日食）の観測 by Eddington）

↘ 全世界の一面記事を飾る！

・水星の近日点移動

・ブラックホール（星の自己重力崩壊）

・重力波（GW150914：初観測！）

・重力による時間の遅れ ⇝ GPS，光格子時計

注4.20 $\mathcal{L}_g = R^1 + \underbrace{R^0}_{\text{定数}} + f(R)$ のように一般化できる

↪ f(R)-gravity（野尻伸一さん，…）

宿題1 $\mathcal{L}_g = R - 2\Lambda$ (Λ: 定数) のとき、$\delta S = 0$ の与えるEOMを書き下せ

（Einstein eq. にどのような項が加わるかという問題）

4.6 ブラックホール

定理4.21（Schwarzschild解，1916年）

以下の計量は原点を除く領域でのEinstein eq.の厳密解：

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

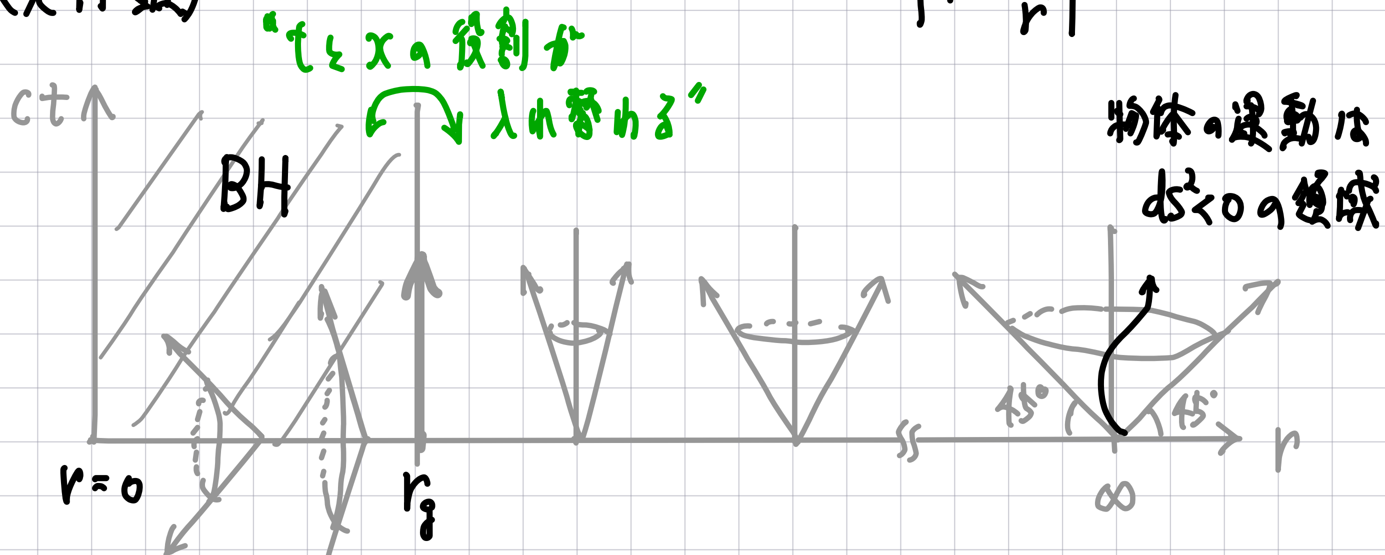
$r_g := \dfrac{2GM}{c^2}$ をSchwarzschild半径という（太陽で $r_g \fallingdotseq 3\mathrm{km}$）

☺ レポート15

注4.22 $r < r_g$ の領域では光も含めてすべての軌道がその領域内におさまる。

(このような領域を Black Hole (BH) という)

光の軌道 (光円錐) $\Leftrightarrow ds^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{c\,dt}{dr} = \pm \dfrac{1}{\left|1 - \frac{r_g}{r}\right|}$



$r = 0$ ↑ 曲率特異点

r_g ↑ 曲率は発散しない (見かけの特異点)

$r = r_g$ (BHの"表面") を事象の地平線という (event horizon)

注4.23 (4次元のBH)

- Kerr解 (M, J) ← 角運動量 — 1963
- Reissner-Nordström解 (M, Q) ← 電荷 — 1917頃
- Kerr-Newman解 (M, J, Q) — 1965

—— あとはスライド ——

§4.7 ブラックホール四方山話

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
浜中真志 (はまなか まさし)

最後に宿題2があります！

※文献の引用番号[nn]は、H中「素粒子論と現代数学(名大の授業)」資料参照：http://ocw.nagoya-u.jp/

ブラックホール(Black Hole=BH)研究の歴史

- 1915年：アインシュタインの一般相対論
- 1916年：シュワルツシルトBH解
- 1939年：星の重力崩壊によるBHの形成
- 1965年：カー・ニューマンBH解
- 1965年～1975年：黄金時代(特異点定理・無毛定理・一意性定理・面積定理・・・)
  [ペンローズ・ホーキング]
  2020年ノーベル賞！
- 1972年：ブラックホール熱力学
- 1975年：ホーキング輻射の発見
- ・・・
- 1996年～：超弦理論によるBH熱力学の解明


オッペンハイマー
ウィキペディア[22]

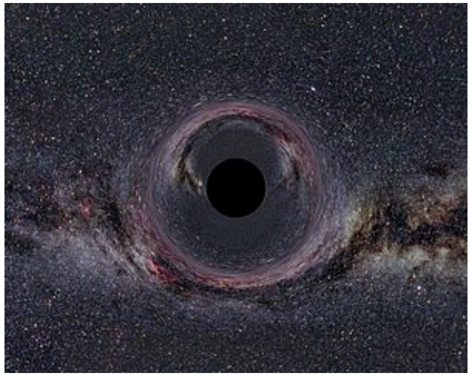

Roger Penrose
ウィキペディア[23]

ブラックホールはそもそもあるのか？

- はくちょう座X-1（強いX線の放射源）

  cf.「慶永十五年(1408年)六月二十一日戌戌客星あらわる。天文博士 某、凶兆八ケ条を奏す」[続史愚抄三十二]

- 銀河中心の超巨大ブラックホール(太陽の1億倍程)



Ute Krausによるシミュレーション画像[24]

- 2つのブラックホール衝突による重力波の検出！

ブラックホールの性質

- **無毛定理：ブラックホールには「毛」(個性)がない**

  [カーター、ホーキング、イスラエル、ロビンソン]

  ブラックホールを特徴づけるパラメータは
  M(質量)、J(角運動量)、Q(電荷)のみ。

- **面積定理** [ホーキング]

  ブラックホールの事象の地平線の面積Aは
  時間とともに減少しない

  (例)　シュワルツシルトBH $A = 4\pi r_{EH}^2 = 16\pi M^2$

ブラックホールの性質

●ブラックホール熱力学 [バーディーン、カーター、ホーキング]

	普通の熱力学	BH熱力学
第0法則	熱平衡において温度 T はいたるところ一定	定常BHにおいて表面重力加速度κはいたるところ一定
第1法則	下記(i)	下記(ii)
第2法則	エントロピーSは増大する	EHの面積Aは増大する
第3法則	T＝0は実現しない	κ=0は実現しない

$$(i)\ \delta E = T\delta S + work\ terms \quad (ii)\ \delta M = \frac{\kappa}{2\pi}\delta\left(\frac{A}{4}\right) + work\ terms$$

・ブラックホールのエントロピー： $S = \frac{1}{4}A$ cf.[ベケンシュタイン]

・上記の議論はただの類似（似ているというだけ）！

・BHの温度って何？熱放射するの？？

・BHのエントロピーって何？おいしいの？

ホーキング輻射

- ブラックホールはそんなに「黒く」ない！

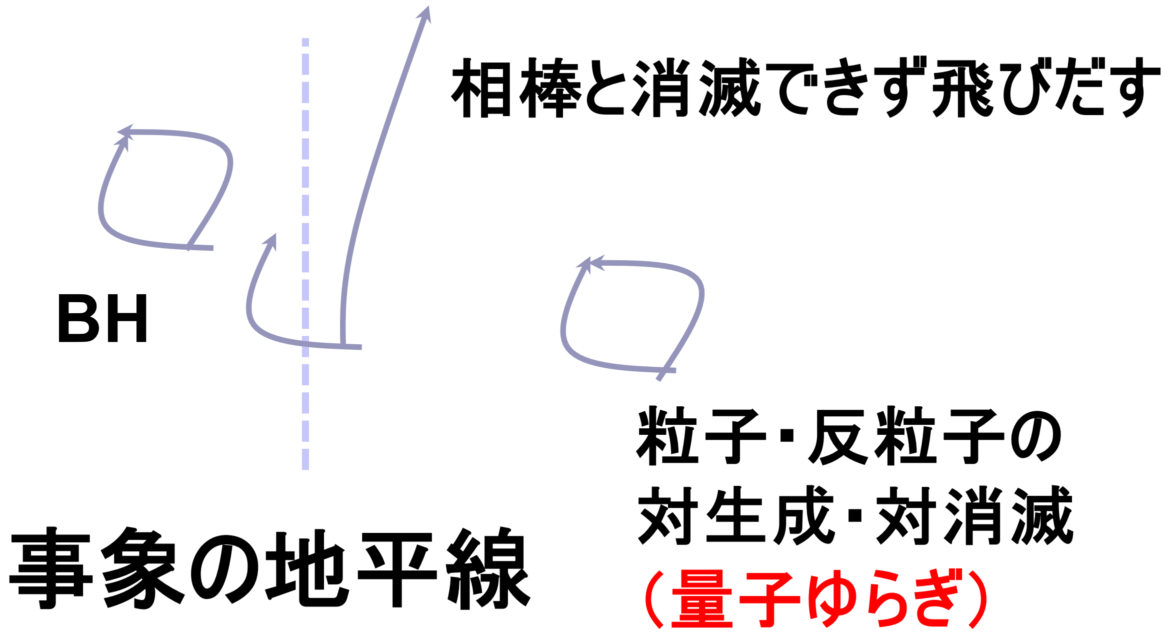
ブラックホールは熱放射をする! [ホーキング、1974年]

(吸い込むだけではない！)

設定:ブラックホール時空を背景として固定し、
その上で物質場を量子化する

直観的説明:

Steven
Hawking
ウィキペディア[25]



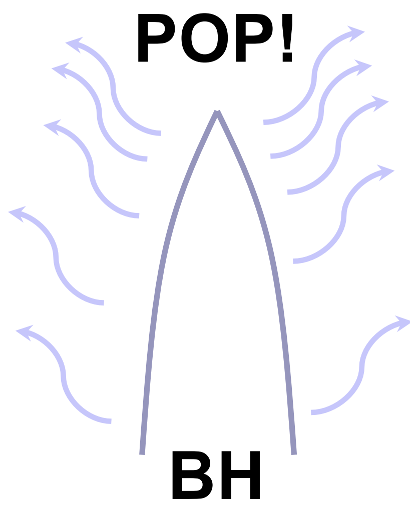
- 注：量子力学に従う物質場はユニタリな時間発展をする(因果律を守り過去から未来へ情報を保つ)
- シュワルツシルトBHの温度： $T = \dfrac{1}{8\pi M}$ ㈷注：BHの比熱は負！

熱放射によりエネルギー(質量)を失う

→温度が上がって放射が激しくなる→BHの蒸発

- BHに吸い込まれた物質の情報は一様なホーキング輻射となり、蒸発後情報損失が起こるのでは？

(ブラックホールの情報損失問題:大問題)



- 2つの立場：

(i) 量子力学は破たんし情報は損失する

(ホーキングはこちらに賭けた)

(ii) 量子力学は破たんせず情報は保たれる

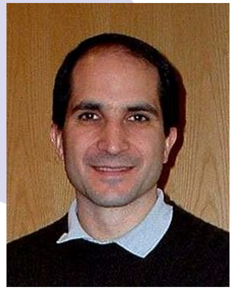
(プレスキルはこちらに賭けた)

1997年：AdS/CFT対応(マルダセナ)

- ホログラフィック原理の具体的実現

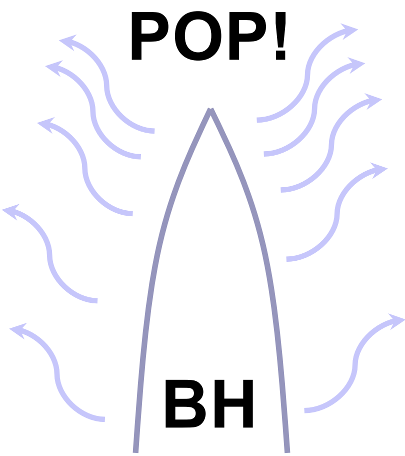
  バルクの(d+1)次元重力理論(AdS空間)

  ＝境界のd次元ゲージ理論(共形場理論)
- BPS状態については十分な検証
- Non BPS状態について研究進展中
- BHの情報損失問題について重要な知見



Juan Maldacena [57]

バルクの重力理論 ← 等価 → 境界のゲージ理論



ユニタリな
時間発展
（情報を保つ）

●ブラックホールの情報損失問題再訪

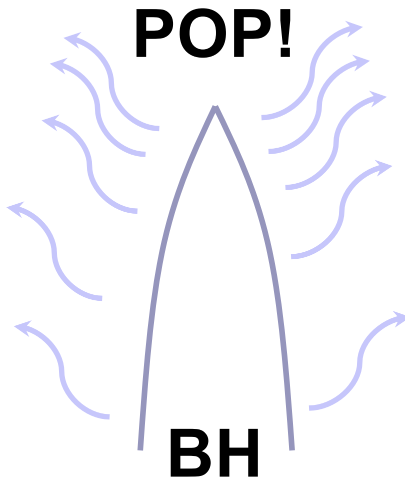
量子力学に従う物質場はユニタリな時間発展をする
（因果律を守り、過去から未来へ情報を保つ）
ブラックホールに吸い込まれた物質の情報は一様な
ホーキング放射となり、情報損失が起こるのでは？
→2つの立場：このような状況では

(i) 量子力学は破たんし情報は損失する
(ホーキングはこちらに賭けた)

(ii) 量子力学は破たんせず情報は保たれる
(プレスキルはこちらに賭けた)

（ベースボール）
百科事典

2004年、ホーキングは自ら
情報が損失しないという
研究発表を行った。ホーキングの負け[58]



数理物理山のハイキングはいかがでしたでしょう？

- 今後もぜひ物理を(不必要に)毛嫌いせず目を向けてくだされば幸いです。
- 参考文献をいくつかサポートページからリンクしました。
- 宿題2：この授業に関する感想・ご意見などを自由に述べよ。(来年以降の授業に役立つ建設的・批判的ご意見を歓迎します。主に対面で受講したかオンラインで受講したかも記載してくださると参考になります。)