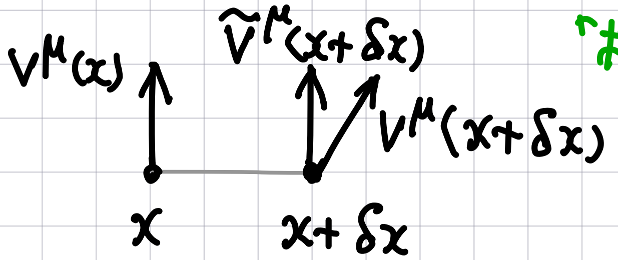
4.3 共変微分

まず直観的に vectorの平行移動・共変微分を議論

$V^\mu(x)$: 反変vectorとする　　[ref.] 佐々木節「一般相対論」

δx^μ : 無限小反変vector として V^μの無限小平行移動を def:

$$\tilde{V}^\mu(x+\delta x) := V^\mu(x) - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(x)}_{\text{「接続(係数)」という}} V^\nu(x)\, \delta x^\rho \quad \cdots ①$$



ここで以下の演算子Dを導入:

$$DV^\mu := V^\mu(x+\delta x) - \tilde{V}^\mu(x+\delta x)$$

$$\overset{①}{=} \overbrace{V^\mu(x+\delta x) - V^\mu(x)}^{\delta V^\mu \text{ (普通の微分からのズレ)} \cdots ②} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\nu \delta x^\rho$$

$$= \underbrace{\left(\partial_\rho V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\nu\right)}_{\nabla_\rho V^\mu \,:\, V^\mu\text{の共変微分}} \delta x^\rho$$

← cf. ゲージ理論 $D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + A^a_{\mu b} \varphi^b$

共変とする

$$\Downarrow \quad \delta(\underbrace{V^\mu u_\mu}_{\text{scalar}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\delta V^\mu}_{②\text{を代入}} u_\mu + V^\mu \delta u_\mu = 0$$

$\forall V^\mu$で成立

$$Du_\mu = \underbrace{\left(\partial_\rho u_\mu - \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} u_\nu\right)}_{\nabla_\rho u_\mu \,:\, u_\mu\text{の共変微分}} \delta x^\rho$$

一般のtensorに対する共変微分： $\delta(V^\mu \underset{\swarrow}{u_\nu}) = \delta V^\mu u_\nu + V^\mu \delta u_\nu$

$$\nabla_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \partial_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} + \sum_{k=1}^{p} \Gamma^{\mu_k}{}_{\sigma_k\rho} T^{\mu_1\cdots\sigma_k\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} - \sum_{l=1}^{q} \Gamma^{\sigma_l}{}_{\nu_l\rho} T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\sigma_l\cdots\nu_q}$$

特に $\nabla_\rho \overset{\text{scalar}}{T} = \partial_\rho T$

<u>命題4.7</u> 座標変換(※)：$x'^\mu = x'^\mu(x)$ の下、$\nabla_\mu V_\nu$ が $(0,2)$-tensor

$$\Rightarrow \quad \Gamma'^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\Gamma^\kappa{}_{\sigma\tau} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}$$

☺レポート

<u>定義4.8</u> $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ を Christoffel symbol という (tensorではない)

<u>注4.9</u> $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}$ は $(1,2)$型 tensor (≡0 を要請する)

<u>命題4.10</u> $\underset{\text{(計量と両立)}}{\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0} \to \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\left(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$

このとき ∇_ρ を Levi-Civita 接続という.

☺ $$0 = \nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \underbrace{\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} g_{\sigma\nu}}_{=\Gamma_{\nu,\mu\rho}} - \underbrace{\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}}_{=\Gamma_{\mu,\nu\rho}}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\nu g_{\mu\nu} &= \cancel{\Gamma_{\mu,\sigma\nu}} + \Gamma_{\sigma,\mu\nu} \\
\partial_\mu g_{\nu\sigma} &= \Gamma_{\sigma,\nu\mu} + \cancel{\Gamma_{\nu,\sigma\mu}} \\
+)\ -\partial_\sigma g_{\mu\nu} &= -\cancel{\Gamma_{\nu,\mu\sigma}} - \cancel{\Gamma_{\mu,\nu\sigma}} \\
\hline
&= 2\Gamma_{\sigma,\nu\mu}
\end{aligned}$$

← $g^{\sigma\rho}$ で添字を上げる ▨

__定義 4.11__ (数学の def)

vector場 Y を vector場 X 方向に微分する操作

(M, g) : semi-Riem. 多様体

$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が以下 (i)〜(iii) をみたすとき、

$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$　M上のアファイン接続という。(connection)

(i) bilinear

(ii) $\nabla_X (fX) = (Xf)Y + f\nabla_X(Y)$

(iii) $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X(Y), \quad f \in C^\infty(M)$

さらに (iv), (v) もみたすとき、Levi-Civita 接続といい、一意に定まる

(iv) $X\langle Y | Z\rangle = \langle \nabla_X Y | Z\rangle + \langle Y | \nabla_X Z\rangle$

$\langle\ |\ \rangle$: 各点における接vector空間の内積

(v) $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$

局所的に $g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu | \partial_\nu \rangle$, $\nabla_\mu(\partial_\nu) := \nabla_{\partial_\mu}(\partial_\nu) = \underbrace{\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}}_{\text{これで}\Gamma\text{を定める}} \partial_\rho$

宿題　$X = \partial_\rho,\ Y = \partial_\mu,\ Z = \partial_\nu$ のとき (iv) $\Rightarrow \nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ を示せ

4.4 曲率

__定義 4.12__　Levi-Civita 接続 ∇ に対して、次で def される (1, 3)型 tensor R を Riemann曲率tensor という。

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

(局所表示) $X = \partial_\rho,\ Y = \partial_\sigma,\ Z = \partial_\nu$ とすると

$$(\text{右辺}) = \nabla_\rho(\underbrace{\nabla_\sigma(\partial_\nu)}_{\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}\partial_\mu}) - \nabla_\sigma(\underbrace{\nabla_\rho(\partial_\nu)}_{\Gamma^\mu{}_{\rho\nu}\partial_\mu}) \overset{\text{(ii)}}{=} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\partial_\mu$$

cf. P41 の $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} := \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\rho\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}$$

命題4.13

(i) Ricciの恒等式 : $\nabla_\mu \nabla_\nu V_\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V_\rho = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} V_\sigma$

(ii) cyclic 〃 : $R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} + R^\sigma{}_{\nu\rho\mu} + R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = 0$

(iii) Bianchi 〃 : $\nabla_\mu R^\tau{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\tau{}_{\sigma\rho\mu} + \nabla_\rho R^\tau{}_{\sigma\mu\nu} = 0$

∵ tensorの関係式なので局所慣性系($\forall \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = 0$)で証明すればよい □

↑ $\partial\Gamma$ は $\neq 0$

定義4.14 ・Ricci曲率 $R_{\mu\nu} := R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$

・Scalar曲率 $R := R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ (scalar!)

例4.15 (2次元球面)

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ 極座標 & $r = a$

$$g_{ij} = \begin{array}{c|cc} & \theta & \varphi \\ \hline \theta & a^2 & 0 \\ \varphi & 0 & a^2\sin^2\theta \end{array}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}, \quad g = a^4\sin^2\theta$$

逆行列　　行列式

$\Gamma^\theta{}_{\theta\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \cot\theta$, 他 $= 0$

$R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = \sin^2\theta$, $R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta} = 1$

$R_{\theta\theta} = 1$, $R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta$　　$\left(\Rightarrow R_{ij} = \frac{1}{a^2} g_{ij}\right)$

$R = \frac{2}{a^2}$　(半径a大 ⇔ 曲率小)

cf. $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ のとき (λ: 定数) Mを Einstein多様体 という.