§4 重力理論

4.1 一般相対性理論

基本原理4.1 (Einstein, 1915)

(I) 物理法則はどの座標系においても同一である(一般相対性原理)

(II) 時空の各点の無限小近傍において、特殊相対論が成り立つ座標系が存在する。(等価原理)

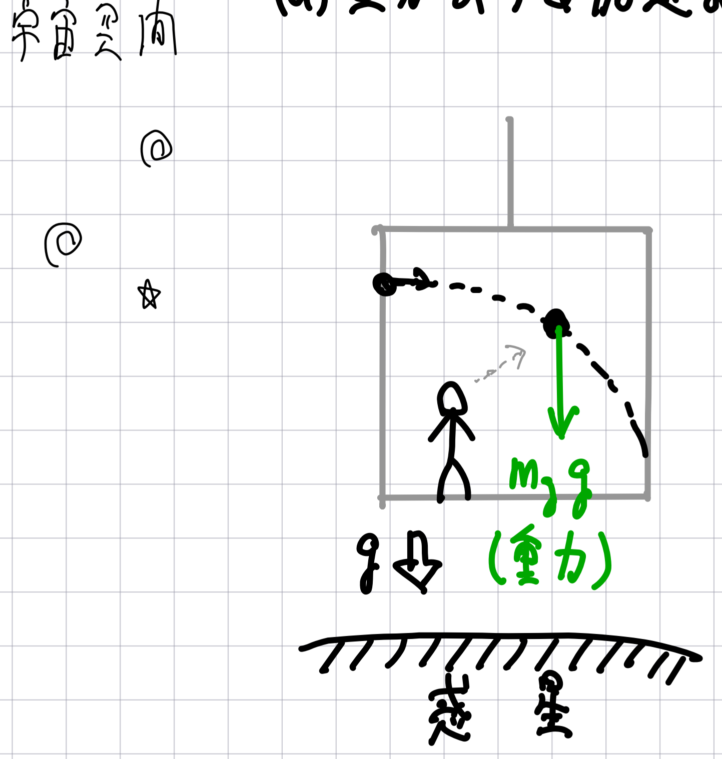
「局所慣性系」

定義4.2 4.1に基づく理論を一般相対論(General Relativity)といい重力の古典論を与える。(プランク・スケールで破綻)

→今日の宿題は課題ページ参照

注4.3 (II)の根拠：アインシュタインのエレベータ

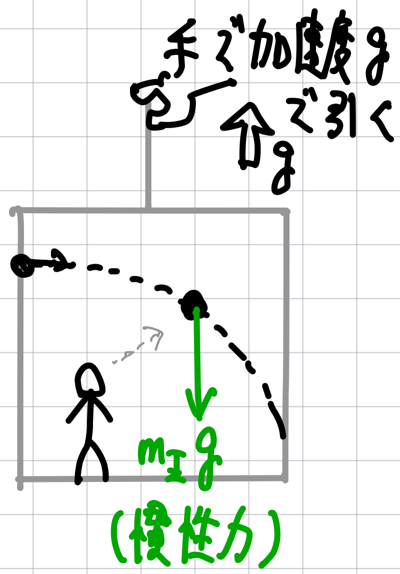
(a) 重力あり&加速なし　　(b) 重力なし&加速あり



EoM

$$\cancel{m_I} a = F = \cancel{m_g} g = \cancel{m_I} g$$

($m_I = m_g$: 実験事実!)
by Eötvös, 1890頃



エレベータ内の人には(a)と(b)は区別できない (重力の効果=加速度の効果)

重力の効果はある加速度系で打ち消すことができる

↳ 時空の曲がり具合として表す

4.2 一般座標変換における tensor

4.1 (I) ⇒ 任意の座標変換で covariant な理論を作りたい

一般相対論の舞台 = semi-Riemann 多様体 (M, g)

多様体　計量

$$\underbrace{ds^2}_{\text{不変線素}} = \underbrace{g_{\mu\nu}(x)}_{\text{計量tensor (重力場)}} dx^\mu dx^\nu \overset{(\mathrm{II})}{=} \underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{=\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}(X) dX^\mu dX^\nu$$

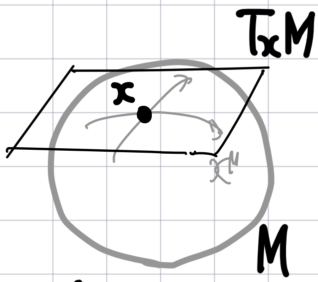
$x^\mu \mapsto {}^\exists X^\mu$ 局所慣性系

← $g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu}$ （xによらない）の場合 Minkowski 空間

<u>用語 4.4</u>

M^n : n次元多様体 : 局所的に $\mathbb{R}^n$ の座標が描ける空間

点 $x \in M$ における接 vector 空間



$$T_xM = \left\{ V^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \,\middle|\, (x^1, \cdots, x^n) \in M \right\}$$

"速度ベクトル" $e_\mu(x)$: 基底

dual ↕

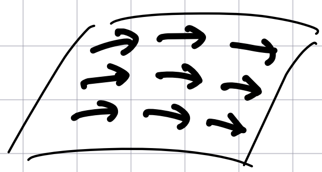
$g_{\mu\nu}(x) = \langle e_\mu(x) | e_\nu(x) \rangle$

〃　余接 vector 空間

$$T_x^*M = \left\{ V_\mu^*(x)\, dx^\mu \,\middle|\, 〃 \right\}$$

$\mathfrak{X}(M) = \{M$上の各点xにおいて接vectorに値をとる関数$\}$

M上のvector場



M上の (semi-Riem.) 計量 :

$x \in M \mapsto g(x)$ であり、以下をみたすもの

$$T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \mapsto g(X, Y)$$

(正定値性なし)

(i) $g(X, Y) = g(Y, X)$

(ii) $g(aX + bY, Z) = a\,g(X, Z) + b\,g(Y, Z)$

(iii) ${}^\forall Y \in T_xM$ に対し、$g(X, Y) = 0 \Rightarrow X = 0$

座標変換 $x'^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ … (*) を考え、tensorを定義

(C^∞ & 可逆)　($= x'^\mu(x)$ と書く)

定義4.5 (*)による変換性により、以下のように分類

・反変 vector

νについて和　　基底と成分は逆の変換性 (P34)

$$v'^\mu = \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}}_{\text{Minkowski}\ \to\ \Lambda^\mu{}_\nu} v^\nu$$

(例) T_xMの元の成分 v^μ

∵ $\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial x'^\mu}}_{\text{基底}} = \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$ (連鎖律)

・共変 vector

$$v'_\mu = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}}_{〃\ \to\ (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu} v_\nu$$

(例) T^*_xM　〃　v^*_μ

∵ $\underbrace{dx'^\mu}_{\text{基底}} = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$ (全微分)

・(p, q)型 tensor

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}$$

(例) ・ $\underbrace{ds^2}_{\text{scalar (不変)}} = g_{\mu\nu}(x)\,\underbrace{dx^\mu}_{(1,0)}\,\underbrace{dx^\nu}_{(1,0)}$ ⇒ $g_{\mu\nu}$: (0,2)型 tensor

・体積要素 $\underbrace{\sqrt{-g}\,\underbrace{dx^0dx^1dx^2dx^3}_{d^4x\ \text{と書く}}}_{\text{scalar}}$

$g := \det g_{\mu\nu}$: 負

$\left(g' = J^{-2}g \quad \therefore g<0 \right.$

$\left. \begin{vmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{vmatrix} \quad J^{-1} = \det\left(\dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right) \right)$

注4.6 (tensorの演算)

・添字の上げ下げ (e.g. $g_{\mu\nu}A^\nu = A_\mu$), 縮約などはP35と同様

・ただし tensorの微分は一般にtensorを与えない ⇝ 共変微分の導入

(e.g. $\partial'_\mu v'_\nu(x) = ◍\cdot\partial_\mu\left(▨(x)\cdot v_\nu(x)\right)$ ▨もたたく)