例2.28 (Lorentz scalar)

物体とともに動く時計の示す時間

$(cd\tau)^2 = -dx_\mu dx^\mu = c^2(dt)^2-(d\vec{x})^2$

(i) $s^2 = x_\mu x^\mu = -(ct)^2+\vec{x}^2$

(ii) 無限小の固有時間間隔 $d\tau := \sqrt{-dx_\mu dx^\mu} = dt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma}dt$

(iii) $d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3$ $\quad(|\det\Lambda| = 1)$

$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$

ダランベルシアン

(iv) $\Box := \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_0^2 + \underbrace{\partial_{\vec{x}}^2}_{\text{ラプラシアン}}$ (cf. P27(W))

例2.29 (Lorentz vector)

$\beta := \frac{v}{c}$

時間成分 空間成分

(i) 4元速度 $u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt}\left(=\gamma(c,\vec{v})\right)$ …① $\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$u_\mu u^\mu = -\gamma^2(c^2-v^2) = -c^2$ (一定) …②

(ii) 4元運動量 $p^\mu := mu^\mu \overset{①}{=} (\underbrace{m\gamma c}_{p^0}, \underbrace{m\gamma\vec{v}}_{\vec{p}}) =: \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ …③

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{|\beta|<1}{\overset{\beta\simeq 0}{=}} \underbrace{mc^2}_{\text{静止エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{非相対論的運動エネルギー}} + \mathcal{O}(\beta^2)$$

②×m² & ③: $p_\mu p^\mu \underset{③}{=} -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 \underset{②\times m^2}{=} -m^2c^2$ …④

∴ $E^2 = (c\vec{p})^2 + (mc^2)^2$ …⑤ (← m=0 のときも実は正しく $E = c|\vec{p}|$)

※ 光量子仮説を認めれば、 $E = \hbar\omega = h\nu$, $|\vec{p}| = \hbar|\vec{k}| = \frac{h}{\lambda}$ & $c = \lambda\nu$ より従う

122
7/8

定理2.30 $\underbrace{\begin{pmatrix}\text{Lorentz}\\ \text{tensor}\end{pmatrix}}_{\substack{\|\\ (T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}\text{ と書く})}} = 0$ の式はローレンツ不変

∵ $T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot} = 0$

↓ (＊)

$T'^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot} = \Lambda\Lambda\,{}^t\Lambda^{-1}\,{}^t\Lambda^{-1}\,\overset{0}{\cancel{T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}}} = 0$ ∎

例2.31 (相対論的物理法則)

(i) Maxwell eq. : レポート8 & form は大域的 ⇒ $F_{\mu\nu}, A_\mu, j_\mu$: tensor

$$\begin{cases} \partial^\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu & \leftarrow \text{運動方程式} \\ \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 & \leftarrow \text{ビアンキの恒等式} \end{cases}$$

$$J_\mu := \frac{4\pi}{c}(-c\rho, \vec{j}), \quad A_\mu := (-\phi, \vec{A})$$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

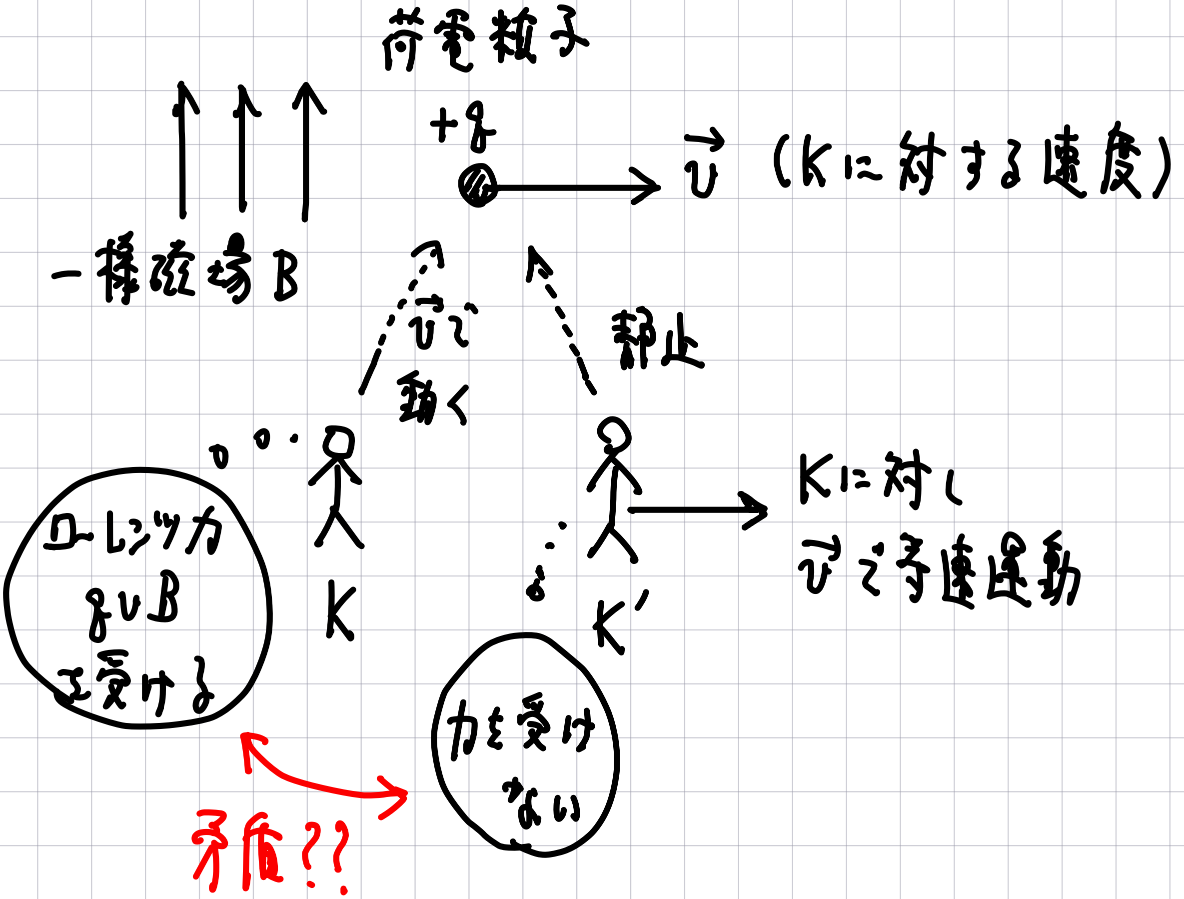
(ii) 相対論的運動方程式 (ミンコフスキー eq.) ← 0成分: $\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$ (仕事率)

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \underset{\text{4元力}}{K^\mu} := \left(\frac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{f}, \gamma\vec{f}\right) \xrightarrow{\beta=0\text{で}} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \simeq \vec{f} : \text{Newtonの運動方程式}$$

cf.[山本・中村] I巻P561, [米谷]

注 電場・磁場は2階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ ((※)で変換される)
$\vec{E}, \vec{B}$ が変換されないと、以下のパラドックスが生じる

↑ レポート9 (3)



§3 ゲージ理論

3.1 場の理論と変分原理

4次元ミンコフスキー空間上で相対論的場の理論を考える

← 座標 x^0, x^1, x^2, x^3

$$\underbrace{S}_{\text{作用積分}} = \int \underset{\overset{\shortparallel}{dx^0dx^1dx^2dx^3}}{\underline{d^4x}}\ \underbrace{\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu\phi_a)}_{\text{ラグランジアン密度}}$$

(Lorentz scalar)

cf. 有限自由度&非相対論: $S = \int dt\, L(q^i, \dot{q}^i, t)$

場 $\phi_a = \phi_a(\overset{\overset{ct}{\shortparallel}}{x^0}, x^1, x^2, x^3)$

$\shortparallel$

$\phi_a(x)$ と書く

命題 3.1 (Euler-Lagrange eq., or EOM)

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right) = 0$$

↖ (Lorentz tensor) = 0 の式

(b.c. $\delta\phi_a\big|_{R\to\infty} = 0$) ← 4次元時空での無限遠

☺ 1.22と同様 ($\phi_a(x) = \phi_a^*(x) + \overbrace{\delta\phi_a(x)}^{\shortparallel\ \in\ \eta_a(x)}$) ▨

例 3.2 (実) Klein-Gordon eq. (φ: $\mathbb{R}$値関数)

$$S_\varphi = \int d^4x\ \frac{1}{2}\left(-\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \underbrace{m^2\varphi^2}_{\text{質量項 (2次の項)}}\right)$$

EOM: $(\partial_\mu\partial^\mu\varphi - m^2\varphi) = 0$

※以後、$c=1$, $\hbar := \frac{h}{2\pi} = 1$ とする。(hはプランク定数)

例 3.3 Maxwell eq. (cf. レポート8)

$$S_{EM} = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu \overbrace{J^\mu}^{\text{外場}}\right)$$

第一項 → $\frac{1}{2}\int d^4x\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)$

EOM: $\partial^\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu$ (+ ビアンキ恒等式 $dF = 0$) = Maxwell eq.

命題3.4 Maxwell eq および S_{EM} は以下の変換の下不変:

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda \quad (\lambda(x):任意の実関数)$$

これを(電磁気学の)ゲージ変換と呼ぶ　(時空の対称性とは独立)

3.2 ゲージ原理

複素scalar場の理論を考える

$$S_\phi = \int d^4x \left(-\partial_\mu \bar{\phi}\, \partial^\mu \phi - m^2 \phi \bar{\phi} \right)$$

虚数単位

$\phi = \varphi_1 + i\varphi_2$ で

↓ ↓

それぞれ例3.2の実scalar理論

EOM: $(\partial^2 - m^2)\phi = 0$ (複素KG eq.)

命題3.5 これは以下の変換の下不変:

$$\phi \mapsto \phi' = \underbrace{e^{i\theta}}_{\in U(1)} \phi$$

θ: 任意の実数(xによらない)

$U(1)$ ⇝「大域的U(1)対称性をもつ」という

定理3.6 (Weylのゲージ原理, 1929年)

電磁場と場ϕが相互作用するシステムは以下のように実現される:

- 微分 ∂_μ を共変微分 $D_\mu := \partial_\mu - ieA_\mu$ におきかえる
  covariant
- 電磁気のゲージ変換3.4を物質場ϕに対する以下の変換と合わせて行う

$$\phi \mapsto \phi' = \underbrace{e^{ie\lambda(x)}}_{局所的U(1)変換} \phi \quad (\theta(x) = e\lambda(x))$$

tensorぽいふるまい
↓
(covariant)

このとき $D_\mu \phi \mapsto D'_\mu \phi' = e^{ie\lambda} D_\mu \phi$

方言3.7 (xに依存しない)大域的対称性を(xに依存する)局所対称性に拡張することを「ゲージ化」と呼ぶ

例3.8 複素scalar理論 S_ϕ をゲージ化した作用:

$$S_{\phi,A} = \int d^4x \left(-D_\mu\bar{\Phi}\, D^\mu\phi - m^2\bar{\Phi}\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$$

これは U(1) ゲージ変換

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \frac{i}{e}g^{-1}\partial_\mu g, \quad \phi \mapsto \phi' = g^{-1}\phi \quad \left(g(x) = \overset{\overset{U(1)}{\cup}}{e^{ie\lambda(x)}}\right)$$

の下、不変。

(ゲージ群 G=U(1) と言う)

3.3 Yang-Mills理論

G=U(1) : abel群(可換群)

↓

SU(2) : Non-abel群(非可換群) に拡張

dagger(†記号): エルミート共役の記号(物理)

2成分複素scalar場の理論を考える:

ϕ_1, ϕ_2 は共通の質量 m をもつ

$$S_\Phi = \int d^4x \left(-\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi\right) \qquad \Phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$$

命題3.9 これは以下の大域的 SU(2) 対称性をもつ

$$\Phi \mapsto \Phi' = g^{-1}\Phi \qquad g \in SU(2)$$

定数行列 (xによらない)

これを「ゲージ化」したい

(ゲージ変換で Φ, $F_{\mu\nu}$, 微分が「covariant」に変換されるようにしたい)

$A_\mu(x)$: エルミート行列 (SU(2)のリー環) とする. (A_μ : ゲージ場という)

「A_μはエルミート行列値関数」ということ $\boxed{41}$

定義3.10 $D_\mu := \partial_\mu - ieA_\mu$ を共変微分 (e : 結合定数) という

$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$ を場の強さ

← $[A,B] := AB - BA$

定義3.11 $g(x) \in SU(2)$としたとき, 以下の変換をSU(2)ゲージ変換という

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = g^{-1}A_\mu g + \frac{i}{e} g^{-1}\partial_\mu g, \quad \Phi \mapsto \Phi' = g^{-1}\Phi$$

命題3.12 このとき $F_{\mu\nu} \mapsto F'_{\mu\nu} = g^{-1}F_{\mu\nu}g$, $D_\mu\Phi \mapsto \underline{D'_\mu\Phi' = g^{-1}D_\mu\Phi}$

宿題 ↑これを示せ

定理3.13 (Yang-Mills, 1954) cf. 内山, パウリ

S_Φをゲージ化した理論は以下で与えられ, SU(2)ゲージ変換の下不変

$$S_{\Phi,A} = \int d^4x \left(-D_\mu\Phi^\dagger D^\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \frac{1}{4}\underbrace{\mathrm{Tr}}_{} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$$

2×2行列のトレース

A_μのEOM : $[D_\mu, F^{\mu\nu}] = 0$ (Yang-Mills eq.)

命題3.14 $D := dx^\mu D_\mu$ (1-form)

$F := \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ (2-form) として $DF = 0$ (恒等式)

(詳しくはレポート)

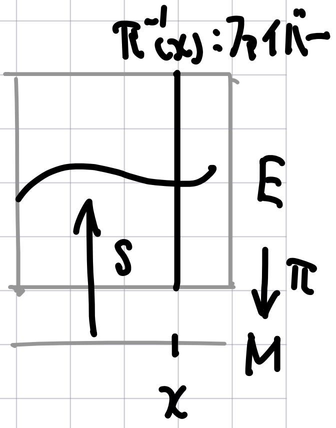
注 ゲージ群をG=U(N)としても同様. N=1で電磁気に帰着

注3.15 ゲージ場A_μの質量項はゼロ ⇝ ヒッグス機構により質量を獲得!

∵ 質量項 $m^2A_\mu A^\mu$ はゲージ不変でない ▨

おまけ：ゲージ理論の物理と数学

物　　理	数　　学
ゲージ理論	ファイバー束の理論
ゲージ変換	束自己同型
ゲージ場 A_μ	接　続
場の強さ $F_{\mu\nu}$	曲　率
ゲージ群G	構造群
物質場（波動関数）	束の切断
（A_μだけの）ゲージ理論	主G束
＋物質を含む理論	＋同伴束



〈その後の発展（数学との関わり）〉

1978年	インスタントンのADHM構成法
1982年	モノポールのNahm構成法
1987年	ヒッチン・システム
1982年	Wittenのモース理論
1983〜90	Donaldson理論
1994年	Seiberg-Witten理論 Vafa-Witten理論（& 2005 Kapustin-Witten） Quiver ゲージ理論
1995年	D-brane革命

果てしなく続く

2007 Alday-Gaiotto-Tachikawa対応 …