2.4 物理法則の相対論的定式化

座標変換 $x' = \Lambda x$ …(*) で良いふるまいをする量をdefしたい

(行~列)

定義2.22 (*)の下

νについて和　　x^μと同じ変換性

$v'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu}$ と変換する量を反変vector

$v'_{\mu} = ({}^t\Lambda^{-1})_{\mu}{}^{\nu} v_{\nu}$ 〃 共変vector

という } 双対

$\left(= v_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\right)$

Λ 行 列 上つき(反変成分) 下つき(共変成分)

例2.23 $\begin{cases} dx^{\mu} : \text{反変vector} \\ \partial_{\mu} := \dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}} : \text{共変vector} \end{cases}$

命題2.24 $(\text{共変})_{\mu}(\text{反変})^{\mu}$ という量は(*)の変換の下, 不変

μについて和

∵ $(\text{共変})_{\mu}(\text{反変})^{\mu} \overset{(*)}{\longmapsto} (\text{共変})_{\nu} \underbrace{(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho}}_{=\delta^{\nu}{}_{\rho}} (\text{反変})^{\rho} = (\text{共変})_{\mu}(\text{反変})^{\mu}$ ■

和の記号が変換しないよう注意

注 $v^{\mu} \in V$ のとき $v_{\mu} \in V^*$ 　Vの双対空間

・V^*をVの内積を用いて構成

まず $V = (\mathbb{R}^n, \langle\,|\,\rangle)$ とする　標準内積(⇔ユークリッド空間)

$\ \ \ \ \cup$

$x = e_i\ x^i$

基底　成分

$(\cdots\cdots)$ $\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$

$g_{ij} := \langle e_i | e_j \rangle$ を計量(metric)と呼ぶ　　対称 $(g_{ij} = g_{ji})$

双対空間V^*を $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ として構成

← V上の一次形式(線形写像$V \to \mathbb{R}$)

V^*の基底 f^i を $f^i(e_k)=\delta^i{}_k$ で定めたい

$$f^i(e_k) := \langle (g^{-1})^{ij} e_j | e_k \rangle = (g^{-1})^{ij} \overbrace{\langle e_j | e_k \rangle}^{g_{jk}} = \delta^i{}_k \text{ で OK}$$

<u>Fact</u> $V^* = \langle \underbrace{f^1, \cdots, f^n}_{\text{双対基底}} \rangle_{\mathbb{R}}$, $(V^*)^* \simeq V$

$$\underbrace{\langle f^i | f^j \rangle}_{V^*\text{の内積}} := \langle (g^{-1})^{ik} e_k | (g^{-1})^{jl} e_l \rangle = (g^{-1})^{ik} \overbrace{(g^{-1})^{jl} g_{kl}}^{\delta^j{}_k} = (g^{-1})^{ij}$$

※以後 $g^{ij} := (g^{-1})^{ij}$ と略記 $(g^{ik} g_{kj} = \delta^i{}_j)$

- Vの基底変換を考える

$$e'_i = e_j (R^{-1})^j{}_i \quad (= ({}^tR^{-1})_i{}^j e_j)$$

$$x = e'_i x'^i = e_j (R^{-1})^j{}_i x'^i = e_j x^j \quad \therefore x'^i = R^i{}_j x^j$$

V^*では $f'^i = g'^{ij} e'_j = R^i{}_k R^j{}_l g^{kl} e_m (R^{-1})^m{}_j = R^i{}_k \overbrace{g^{kl} e_l}^{f^k}$ ($R^j{}_l (R^{-1})^m{}_j = \delta_l{}^m$)

$$g'_{ij} = \langle e'_i | e'_j \rangle = g_{kl} (R^{-1})^k{}_i (R^{-1})^l{}_j \quad \cdots (**)$$

宿題 $x_i := g_{ij} x^j$ という量は(この基底変換で)どのように変換されるか?

- 内積を不変に保つ変換を考える. (i.e. $g'_{ij} = g_{ij}$)

上の(**)式より. プライムなしと同じ

$$({}^tR)_i{}^k g'_{kl} R^l{}_j = g_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad {}^tR g R = g$$

e_i : 正規直交基底 $\Rightarrow g_{ij} = \delta_{ij}$ (ユークリッド計量)

$\Rightarrow {}^tR R = 1$ (R:直交行列)

<u>注</u> ユークリッドでは ${}^tR = R^{-1}$ より"共変=反変" ($\Leftrightarrow$ "下つき添字 = 上つき添字")

・ここから $V = (\mathbb{R}^{1,3}, \text{“}\langle\,|\,\rangle\text{”})$ に戻る　$(x^0 \equiv ct)$

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad : \text{ローレンツ不変 (命題2.20)}$$

$$= {}^t x\, \eta\, x \overset{(*)}{\longmapsto} {}^t x\, \underbrace{{}^t\Lambda\, \eta\, \Lambda}_{= \eta}\, x \qquad \eta := \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{array} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

正定値性なし

← これをみたす Λ 全体
= 広義ローレンツ群

定義2.25 座標変換が広義ローレンツ群に従い、計量 $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ をもつ4次元空間をミンコフスキー空間という　ミンコフスキー計量

注2.26　$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-x_0, x_1, x_2, x_3)$

添字の上げ下げ　時間成分の上げ下げで符号が出る

定義2.27 (tensor)

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p\text{個}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q\text{個}} \quad \text{tensor積}$$

座標変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ で以下のように変換する量 $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ を p 階反変 q 階共変 ((p,q) 型) tensor という.

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p} ({}^t\Lambda^{-1})_{\nu_1}{}^{\sigma_1} \cdots ({}^t\Lambda^{-1})_{\nu_q}{}^{\sigma_q} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q}$$

特に $p = q = 0$ のとき T は scalar といい, $T' = T$

〈tensorの演算〉(詳しくは[風間]5章)

(i) 添字の上げ下げ (共変⇔反変)　例　$\eta_{\mu\nu} A^\nu{}_\rho = A_{\mu\rho}$　$(1,1) \to (0,2)$

(ii) 添字の縮約　例　$A^{\mu\nu}{}_\nu = B^\mu$, $A^\mu B_\mu = C$　←「V^*, V 間で Tr がとられている」 $V^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(V,V)$ cf. [横沼]

(iii) tensorの微分　例　$\partial_\mu A(x) = B_\mu(x)$

$(\partial^\mu := \eta^{\mu\nu} \partial_\nu : \text{反変})$

例 2.28 (Lorentz scalar)

(i) $s^2 = x_\mu x^\mu = -(ct)^2 + \vec{x}^2$

物体とともに動く時計の示す時間

$(c d\tau)^2 = -dx_\mu dx^\mu = c^2 (dt)^2 - (d\vec{x})^2$

(ii) 無限小の固有時間間隔 $d\tau := \frac{1}{c}\sqrt{dx_\mu dx^\mu} = dt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} dt$

(iii) $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (|\det\Lambda| = 1)$

$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$

ダランベルシアン

(iv) $\square := \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_0^2 + \underbrace{\partial_{\vec{x}}^2}_{\text{ラプラシアン}}$ (cf. P27 (W))

例 2.29 (Lorentz vector)

時間成分　空間成分

$\beta := \frac{v}{c}$

(i) 4元速度 $u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} \left(= \gamma(c, \vec{v})\right)$ … ①　$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$u_\mu u^\mu = -\gamma^2(c^2 - v^2) = -c^2$ (一定) … ②

(ii) 4元運動量 $p^\mu := m u^\mu \overset{①}{=} (\underbrace{m\gamma c}_{p^0}, \underbrace{m\gamma\vec{v}}_{\vec{p}}) =: \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ … ③

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{|\beta|<1}{\overset{\beta\simeq 0}{=}} \underbrace{mc^2}_{\text{静止エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{非相対論的運動エネルギー}} + O(\beta^4)$$

②×m^2 & ③ : $p_\mu p^\mu \underset{③}{=} -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 \underset{②\times m^2}{=} -m^2c^2$ … ④

$\therefore\ E^2 = (c\vec{p})^2 + (mc^2)^2$ … ⑤　(← m=0 のときも実は正しく $E = c|\vec{p}|$)

※ 光量子仮説を認めれば、

$E = \hbar\omega = h\nu$

$|\vec{p}| = \hbar|\vec{k}| = \frac{h}{\lambda}$

& $c = \lambda\nu$ より従う

定理 2.30 (Lorentz tensor) = 0 の式はローレンツ不変

$\because\ T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot} = 0 \xrightarrow{(k)} T'^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot} = \Lambda\Lambda{}^t\Lambda^{-1}{}^t\Lambda^{-1}\overset{0}{T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}} = 0$ ∎

例2.31 (相対論的物理法則)

(i) Maxwell eq. : レポート8 & form は大域的 ⇒ $F_{\mu\nu}, A_\mu, j_\mu$: tensor

$$\begin{cases} \partial^\mu F_{\mu\nu} = -j_\nu & \leftarrow \text{運動方程式} \\ \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 & \leftarrow \text{ビアンキの恒等式} \end{cases}$$

$j_\mu := (-c\rho, \vec{j})$, $A_\mu := (-\phi, \vec{A})$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) 相対論的運動方程式 (ミンコフスキー eq.) ← 0成分: $\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$ (仕事率)

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \underbrace{K^\mu}_{4元力} := \left(\frac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{f},\ \gamma\vec{f}\right) \xrightarrow{\beta=0で} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{f} \text{ : Newtonの運動方程式}$$

cf. [山本・中村] 上巻 P561, [米谷]

注 電場・磁場は2階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ ((※)で変換される)
$\vec{E}, \vec{B}$ が変換されないと、以下のパラドックスが生じる

↑ レポート9 (3)