'22 6/24

2.2 特殊相対性理論

基本原理 2.17 (アインシュタイン, 1905)

(I) 物理法則はどの慣性系においても同一である(特殊相対性原理)

(II) 光速はどの慣性系においても一定の値 c をとる(光速不変の原理)

定義 2.18 2.17に基づく理論を特殊相対論 or 相対論的理論という

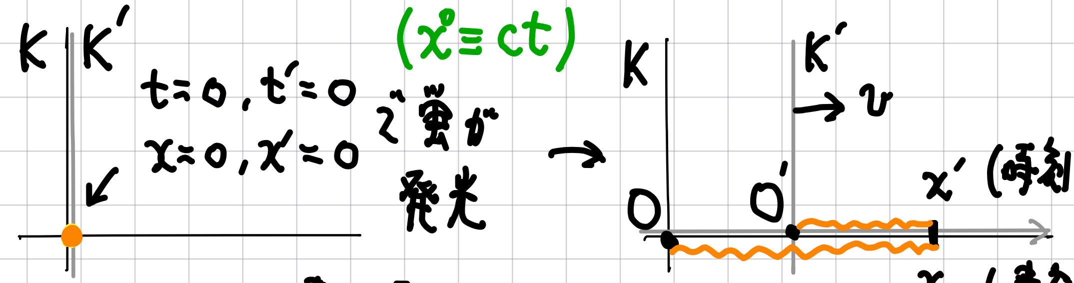
注 2.19 ・(II)の根拠：命題2.10 & マイケルソン・モーレーの実験(1887)

・慣性系同士の座標変換はガリレイ変換ではなくローレンツ変換

((N)は2.17をみたすように修正される＝相対論的力学)

命題 2.20 $S^2 := -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ は慣性系によらない不変量

☺ $(x^0 \equiv ct)$



(1次元で考える)

x' (時刻 t') $(ct')^2 = (x')^2$

x (時刻 t) $(ct)^2 = x^2$

$$\Downarrow$$

$$-(ct')^2 + x'^2 = -(ct)^2 + x^2 \ (=0) \quad \blacksquare$$

命題 2.21 (速度の合成則：1次元)

$\Lambda(v)$: (L.B.)とする. (cf. 2.11)

$\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \Lambda(V)$, ただし $V = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$

($0 < v_1, v_2 < c$ のとき $V < c$) 宿題 ← これを示せ

☺ $$\text{LHS} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi_1 & -\mathrm{sh}\,\xi_1 \\ -\mathrm{sh}\,\xi_1 & \mathrm{ch}\,\xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi_2 & -\mathrm{sh}\,\xi_2 \\ -\mathrm{sh}\,\xi_2 & \mathrm{ch}\,\xi_2 \end{pmatrix} \underset{\text{定理}}{\overset{\text{加法}}{=}} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\xi_1+\xi_2) & -\mathrm{sh}(\xi_1+\xi_2) \\ -\mathrm{sh}(\xi_1+\xi_2) & \mathrm{ch}(\xi_1+\xi_2) \end{pmatrix}$$

$$\tanh(\xi_1 + \xi_2) = \frac{\tanh\xi_1 + \tanh\xi_2}{1 + \tanh\xi_1 \tanh\xi_2} = \frac{\dfrac{v_1}{c} + \dfrac{v_2}{c}}{1 + \dfrac{v_1}{c}\dfrac{v_2}{c}} \equiv \frac{V}{c}$$

V 合成速度 $\blacksquare$

$\left(\tanh\xi_i = \dfrac{v_i}{c}\right)$

・ミンコフスキー・ダイヤグラムによる図示(1次元)

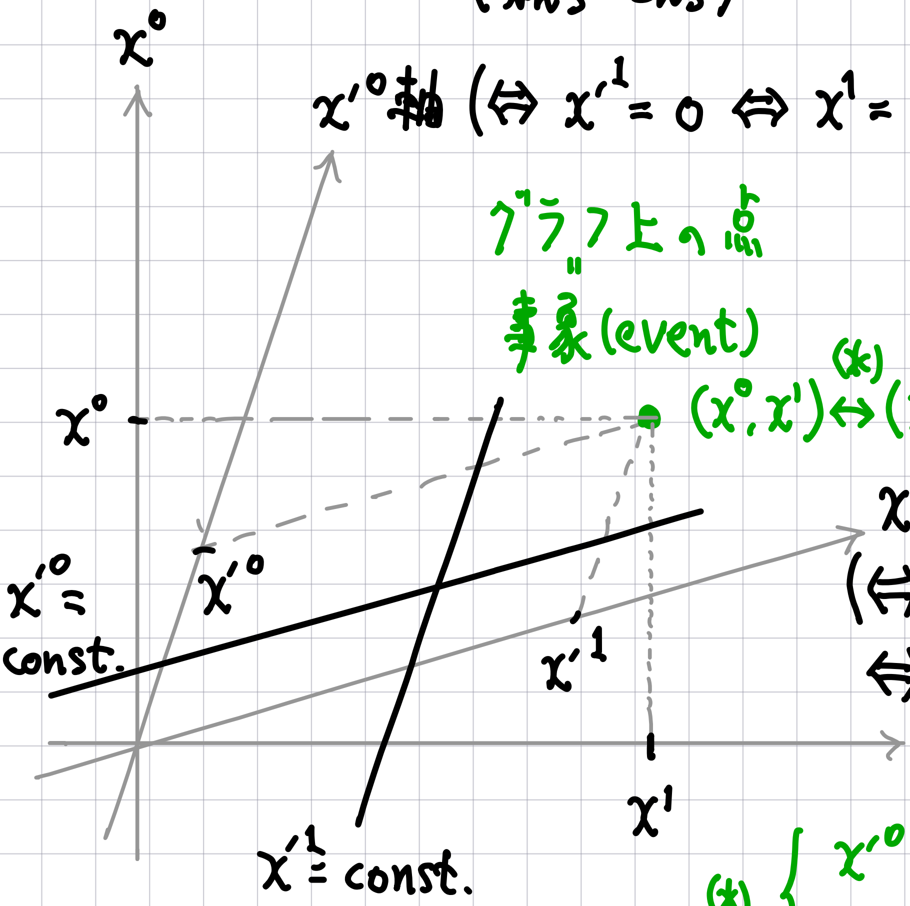
$$(\mathrm{L.B.})\quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\Lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & -\mathrm{sh}\,\xi \\ -\mathrm{sh}\,\xi & \mathrm{ch}\,\xi \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

$\beta = \dfrac{v}{c},\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\tanh \xi := \dfrac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi} = \beta$

($\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $\gamma = 2$)

光速の約86%



x'^0軸 ($\Leftrightarrow x'^1 = 0 \Leftrightarrow x^1 = \beta x^0$)

グラフ上の点 = 事象(event)

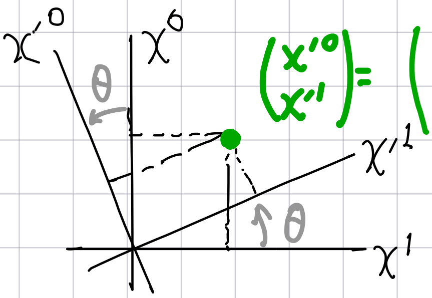
$(x^0, x^1) \overset{(*)}{\leftrightarrow} (x'^0, x'^1)$: 座標値の対応関係

x'^1軸 ($\Leftrightarrow x'^0 = 0$)

$\Leftrightarrow x^0 = \beta x^1$ 傾きβの直線

$$(*)\ \begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \end{cases}$$

cf. ユークリッド空間での角度θの回転



$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$: 座標値の対応関係

x'^1軸 $\Leftrightarrow x'^0 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta \cdot x^0 - \sin\theta \cdot x^1 = 0$

$\Leftrightarrow x^0 = \tan\theta \cdot x^1$

〈簡単な帰結〉

(i) 時間の遅れ

$x'^1=0$ に K' の時計があり、時刻 t' を指している

K'系：$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix}$ とする

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \end{cases} \quad (*)$$

これをK系から見ると $\overset{\text{〃}}{\Lambda}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} \overset{ct}{\overset{\|}{x^0}} \\ x^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\Lambda^{-1}}_{\begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma \\ +\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' \\ \beta\gamma ct' \end{pmatrix}$

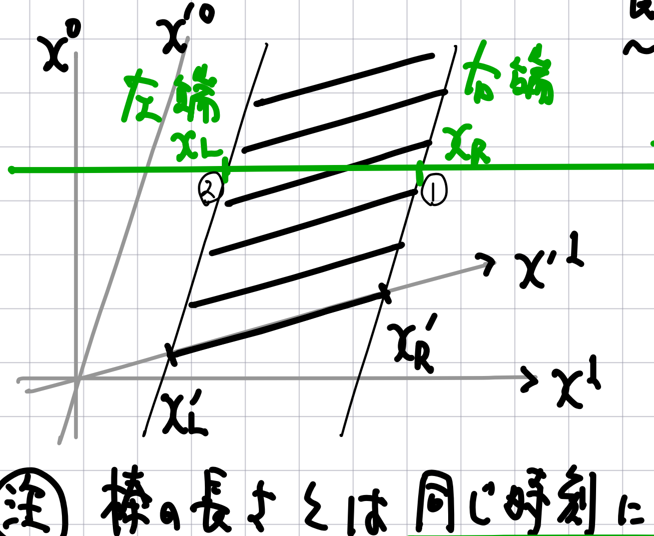
$\therefore t = \gamma t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t'$ ← 1より大！

例えば $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　$t'=1 \leftrightarrow t=2$

K'の"1時"は Kの"2時"

(KからK'の時計を見ると、ゆっくり進んでいる!?)

(ii) 長さの「短縮」



あるx⁰で $= x_L^0 = x_R^0$

長さlの棒がK系に対して等速運動（左図）

$\Leftrightarrow$ $x_R' - x_L' = l$

注　棒の長さとは同じ時刻における両端の座標値の差

K系での棒の長さとはKにおける同時刻での両端の座標値の差

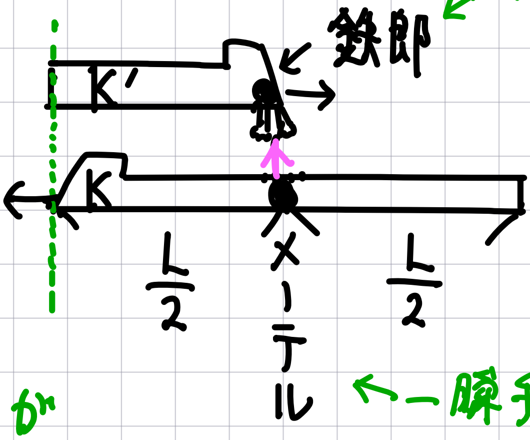
$$\left.\begin{array}{l} ① \; x_R' = \gamma(-\beta x_R^0 + x_R) \\ ② \; x_L' = \gamma(-\beta x_L^0 + x_L) \end{array}\right\} \text{辺々引くと} \; \underbrace{x_R' - x_L'}_{l} = \gamma(x_R - x_L) \quad \therefore x_R - x_L = \frac{1}{\gamma} l$$

棒が「縮んだ」$\Leftrightarrow$ 1より小

〈レポート問題〉

同じ長さんの銀河鉄道

ずっと手を出している



←一瞬手渡し

相対速度 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

(ローレンツ短縮により長さ半分)

⇓

図の位置でOK!(受けとれる)

矛盾??

Kの先頭が

K'の尾に一致した瞬間にメーテルから桃を手渡す作戦

と・こ・ろ・が、K'から見るとKの方が縮んでいる(受けとれない??)

※「桃」は他のものでも構わない