§2 特殊相対性理論

'22 6/17

2.1 電磁場の古典論

4次元時空 $(t, \vec{x})$ を考える
時間 空間

← 電荷・電流の源以外、物質がない(真空)

法則2.1 (「真空中の」マクスウェル方程式) [ガウス単位系]

電場 $\vec{E}(t,\vec{x})$ と 磁場 $\vec{B}(t,\vec{x})$ に関する基本法則
「磁束密度」in [SI単位系]

$$
(M)\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho & \cdots ① \\
\nabla\cdot\vec{B} = 0 & \cdots ② \\
\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \cdots ③ \\
\nabla\times\vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \cdots ④
\end{cases}
$$

$\rho(t,\vec{x})$: 電荷密度
$\vec{j}(t,\vec{x})$: 電流密度
$c \fallingdotseq 3.0\times10^8\,\mathrm{m/s}$ (光速度) $= \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

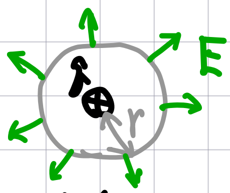
注2.2 ・物質中ではもう少し複雑　・$\vec{E}$と$\vec{B}$は対称的 $\left(\rho=0, \vec{j}=\vec{0}: \begin{matrix}\vec{E}\to-\vec{B} \\ \vec{B}\to\vec{E}\end{matrix} \text{で(M)不変}\right)$
・単位系を変えると係数・呼び名が変わる([SI単位系]など)

命題2.3
$$
\begin{cases}
② : \nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow {}^{\exists}\vec{A}(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\
③ : \nabla\times\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow {}^{\exists}\phi(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}
\end{cases}
$$

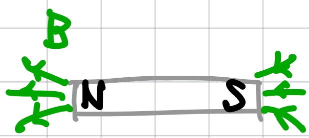
∵ ポアンカレの補題(ただし領域の単連結性は仮定) ☒

注2.4(物理的意味)

①: ガウスの法則 $E = k\dfrac{q}{r^2}$



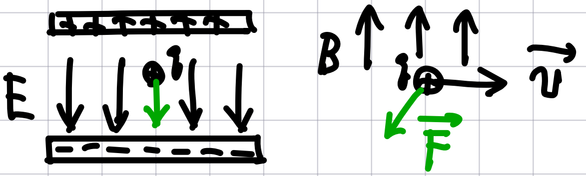
②: モノポール(N極 or S極のみ)の非存在



③: ファラデーの電磁誘導の法則 etc　④: ビオ・サバールの法則 etc.

法則2.5 (荷電粒子qが背景電磁場から受ける力)

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) \quad \cdots ⑤$$ ローレンツ力



2.2 方程式の対称性

(N) ニュートンの運動方程式 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

方程式を不変に保つ(時空の)座標変換を考える

まず $\vec{F} = \vec{0}$ の状況で考える ← 時空そのものの性質が反映

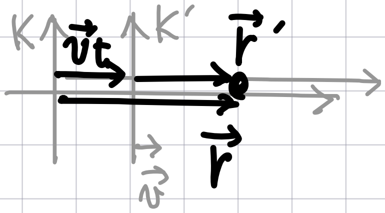
Galilei Boost (G.B.)

定義2.6 (ガリレイ変換) := (3次元回転)+(ガリレイ・ブースト)+(平行移動)

$\vec{r}' = R(\theta)\vec{r}$ 　 $\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \ (\text{絶対時間}) \end{cases}$ 　 $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$

広義には(3次元直交変換) 回転&折り返し

($\theta, \vec{v}, \vec{a}$ は定数)



直観的な慣性系間の座標変換

定理2.7 ガリレイ変換の下、

m が不変であれば($\vec{F} = \vec{0}$の)(N)は不変

∵ ラグランジュ形式で考える。($L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$) ← $U=0$

回転: $L' = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}'^2 = \frac{m}{2}{}^t\dot{\vec{r}}'\,\dot{\vec{r}}' = \frac{m}{2}{}^t\dot{\vec{r}}\,\underbrace{{}^tR(\theta)R(\theta)}_{=1}\dot{\vec{r}} = L$

1×3 　 3×1

G.B.: $L' = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}} - \vec{v})^2 = L + \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2 t - m\vec{r}\cdot\vec{v}\right)$: 準不変 ∎

※ ポテンシャルUは、ガリレイ変換の下(N)が不変となるよう定められる(要請)

命題2.8 ガリレイ変換全体は群をなす(ガリレイ群)

(M) マクスウェルの方程式

時空そのものの性質をみる

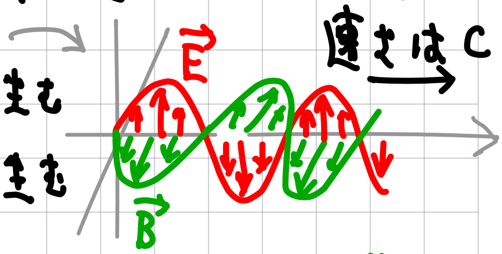
まず $\rho = 0,\ \vec{j} = \vec{0}$ の状況を考える. $\left(\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \Delta\vec{v}\right.$ を用いてよい$\left.\right)$

命題2.9 このとき、$\vec{E}$ と $\vec{B}$ は波動方程式をみたす　宿題 これを示せ ($\vec{E}$ か $\vec{B}$ かでよい)

(W) $(-\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)\,\vec{E} = \vec{0}$ or $\vec{B}$　この解を電磁波(光)という

$\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$, $x^0 := ct$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$

(③ : $\vec{B} \rightsquigarrow \vec{E}$ を生む
④ : $\vec{E} \rightsquigarrow \vec{B}$ を生む)



簡単のため空間1次元で考える

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{\parallel}$$

$$\begin{cases} \mathrm{ch}\,x \equiv \cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \mathrm{sh}\,x \equiv \sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

命題2.10 1次元波動 eq. $(\partial_0^2 - \partial_1^2)\, f(x^0, x^1) = 0$ は 以下の変換の下 不変

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\theta & \mathrm{sh}\theta \\ \mathrm{sh}\theta & \mathrm{ch}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$\because$ $\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta = 1$ と連鎖律 ☒

cf. 1次元ラプラス eq. $(\partial_0^2 + \partial_1^2)\, f(x^0, x^1) = 0$ は以下の変換の下 不変

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$\because$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$　〃　☒

定義2.11 (ローレンツ変換) = $\underbrace{\text{(3次元回転)}}$ + (ローレンツ・ブースト)

Lorentz Boost (L.B.)

広義には (3次元直交変換)

(L.B.) $$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\parallel} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$\beta := \dfrac{v}{c}$, $\gamma := \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

注2.12
- $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\xi & -\mathrm{sh}\xi \\ -\mathrm{sh}\xi & \mathrm{ch}\xi \end{pmatrix}$ と書ける ($\mathrm{ch}\xi = \gamma,\ \mathrm{sh}\xi = \beta\gamma,\ \tanh\xi = \beta$)　$\tanh\xi = \dfrac{\mathrm{sh}\xi}{\mathrm{ch}\xi}$
- $\beta = \dfrac{v}{c} \to 0$ で (L.B.) $\to$ (G.B.)

命題2.13 ローレンツ変換全体は群をなす (ローレンツ群)

定義2.14 物理の基本方程式が誰から見ても同一であるべし
という哲学を「相対性原理」と呼ぶ

(例) 古典力学はどの慣性系から見ても同一である (ガリレイの相対性原理)

(⇔ (N) はガリレイ変換の下. 不変)

注2.15

- (W) はガリレイ変換で形が変わる ⇒ (M) もしかり
- (N) はローレンツ変換 〃

〈まとめ〉

	古典力学	電磁気学
ガリレイ変換	不変	×
ローレンツ変換	×	不変

⤸ 両立しない!? ⇝ アインシュタインの登場 (来週)