1.9 ポアソン括弧

'22 6/3

(q^i, p_i) 正準変数 $\quad i \in \{1, \cdots, n\}$

定義1.57 $f(q,p,t)$, $g(q,p,t)$ に対して、Poisson Bracket (P.B.) を以下のように def する：

iについて和

$$\{f, g\}_{q,p} := \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}$$

q,p 以後、省略

(実は $(q,p) \xrightarrow{\text{正準}} (Q,P)$ のとき $\{f,g\}_{q,p} = \{f,g\}_{Q,P}$) ← [畑] など

例1.58 ・$\{q^i, p_j\} = \delta^i{}_j$, $\{q^i, q^j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$

・$\{q^i, f\} = \dfrac{\partial f}{\partial p^i}$, $\{p_i, f\} = -\dfrac{\partial f}{\partial q^i}$ 基本ポアソン括弧

命題1.59 (i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (特に $\{f,f\} = 0$)

(ii) $\{f, ag + bh\} = a\{f,g\} + b\{f,h\}$

(iii) $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$ Jacobi id

(iv) $\{fg, h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$

命題1.60
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\underbrace{\frac{dq^i}{dt}}_{=\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\underbrace{\frac{dp_i}{dt}}_{=-\frac{\partial H}{\partial q^i}}$$
正準eq.
$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

定義1.61 f と g がポアソン可換 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\{f, g\} = 0$

系1.62 $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ のとき、$\{f, H\} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{df}{dt} = 0$ (f は保存量)

命題1.63（ポアソンの定理）

$$\dot{f}=0,\ \dot{g}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\{f,g\}=0$$

$$\because\ \frac{d}{dt}\{f,g\} \overset{1.60}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}}_{\substack{\text{Leibniz} \\ \{\frac{\partial f}{\partial t},\underline{g}\}+\{\underline{f},\frac{\partial g}{\partial t}\}}} + \underbrace{\{\{f,g\},H\}}_{\substack{\text{Jacobi} \\ \{\{f,H\},\underline{g}\}+\{\underline{f},\{g,H\}\}}} \underset{1.59\,(\mathrm{ii})}{\overset{1.60}{=}} \{\frac{df}{dt},\underline{g}\}+\{\underline{f},\frac{dg}{dt}\} = 0 \quad \blacksquare$$

注1.64 $\frac{d}{dt}$ と $\frac{\partial}{\partial q^i}$ or $\frac{\partial}{\partial p_i}$ とは可換でない（cf $\frac{\partial}{\partial t}$ と $\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial p_i}$ とは可換）

実際 $\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\frac{d}{dt}-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q^i}\right)f(q,p,t)=\{f,\frac{\partial H}{\partial q^i}\}$ ← 宿題1 これを示せ

例1.65 $\{L_1,L_2\}=L_3$（角運動量の成分）（宿題2はNUCTの課題ページ参照）

注1.66 ある保存量のセット $\{Q_1,\cdots Q_M\}$ があって、$\langle Q_1,\cdots,Q_M\rangle$ はポアソン括弧を積とするリー代数をなす。

線形空間であって命題1.59(i)〜(iii)をみたす積 $\{\,,\,\}$ が定義されたもの

$\{Q_i,Q_j\}=C_{ij}{}^k Q_k$ 構造定数

（詳しくはレポート）

例1.67（ケプラー運動）

$E<0$ とする。$\vec{L}$, $\vec{M}:=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\vec{A}$

$$\{L_i,L_j\}=\epsilon_{ij}{}^kL_k$$
$$\{M_i,L_j\}=\epsilon_{ij}{}^kM_k$$
$$\{M_i,M_j\}=\epsilon_{ij}{}^kL_k$$

$$\xrightarrow{B_i^{(\pm)}:=\frac{1}{2}(L_i\pm M_i)}$$

$$\{B_i^{(+)},B_j^{(+)}\}=\epsilon_{ij}{}^kB_k^{(+)}$$
$$\{B_i^{(-)},B_j^{(-)}\}=\epsilon_{ij}{}^kB_k^{(-)}$$
$$\{B_i^{(+)},B_j^{(-)}\}=0$$

← $\mathfrak{so}(4)\simeq\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$ →
（左同型）　（右同型）

1.10 可積分系

定義1.68 自由度nのハミルトン・システム$H(q,p)$（tを陽に含まない）が、互いにポアソン可換なn個の保存量 $\Phi_i(q,p)$ を持つとき、完全可積分系という
completely integrable system

定理1.69 (Liouvilleの定理)
完全可積分系は求積法(四則演算, 逆関数演算, 微分, 不定積分)で解ける

注1.70 アーノルドはのちにこの定理を幾何学的に定式化した
(Liouville-Arnoldの定理とも呼ばれる)

(証明の方針)　(詳しくは[大貫・吉田]など)

P21
正準変換(II): $(q,p) \mapsto (Q,P)$ として $P_i \underset{①}{=} \Phi_i$ となるものを考える. ($H \underset{②}{=} \Phi_n$ ととる)

基本ポアソン括弧 $\Rightarrow \{\Phi_i, \Phi_j\} = 0$ (定理の条件)

正準eq. $\Rightarrow \dot{Q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial P_i} \overset{②}{=} \delta^i{}_n$ ← クロネッカーデルタ

$\Rightarrow Q^i = \delta^i{}_n t + \text{const.}$

母関数 W_2 は①から $\left(p_i = \dfrac{\partial W_2}{\partial q^i}\text{ をみたすよう}\right)$ 構成できる.

$Q^i = \dfrac{\partial W_2}{\partial P_i}$ より, Q^i が(q,p)の言葉で表される. ☒

☆ 可積分系 ↔ 多くの保存量 ↔ 高い対称性

cf. ソリトンの佐藤理論:　cf. [村瀬元彦 in 数理科学別冊「ソリトン」]

ソリトン方程式 ↔ ∞個の保存量 ↔ ∞次元の対称性
(KP eq. KdV eq. など) ← 無限自由度