'22 5/27

1.7 ハミルトン形式の力学

$L(q, \dot{q}, t)$: ラグランジアン

q^i : 一般化座標　$i \in \{1, \cdots, n\}$

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$: 〃 運動量 $\rightsquigarrow$ $\dot{q}_i =$ (pの関数)として表せる (陰関数の定理)

$\Uparrow$

定義1.45 L が非特異 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\det\left(\overbrace{\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}}^{= \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}}\right) \neq 0$　(以下これを仮定)

定義1.46 $H(q, p, t) := \dot{q}^i p_i - L(q, \dot{q}, t)$ をハミルトニアンという (Hamiltonian)

$\dot{q}$に依存しない〜

注1.47 $dH = \cancel{d\dot{q}^i p_i} + \underbrace{\dot{q}^i}_{\text{〃}\ \frac{\partial H}{\partial p_i}} dp_i - \dfrac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \cancel{\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i} - \dfrac{\partial L}{\partial t} dt$

★主張: ラグランジュ形式 L $\overset{\text{ルジャンドル変換}}{\underset{1対1}{\longleftrightarrow}}$ ハミルトン形式 H

定義1.48 (ルジャンドル変換)

$x = (x^1, \cdots, x^n)$

$F(x)$: x^iの関数　$\left(\det \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \neq 0\right)$

とする。ここで変数 y_i を

$$y_i := \frac{\partial F}{\partial x^i}$$

で、関数 $G(y)$ を

$$F(x) + G(y) = x^i y_i$$

iについて和

で定義する。$(x, F(x))$ と $(y, G(y))$ との対応を Legendre 変換という

命題1.49

Legendre 変換は1対1であり、$x^i = \frac{\partial G}{\partial y_i}$, $\det \frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j} \neq 0$ が成り立つ

〈n=1での説明〉

$F = F(q, x)$ の全微分:　($\leftarrow x \equiv \dot{q}$ と解釈)

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{= y} dx \quad \cdots ①$$

($\leftarrow y \equiv p$　〃　)

定義より $G = xy - F(q, x) \quad \cdots ②$

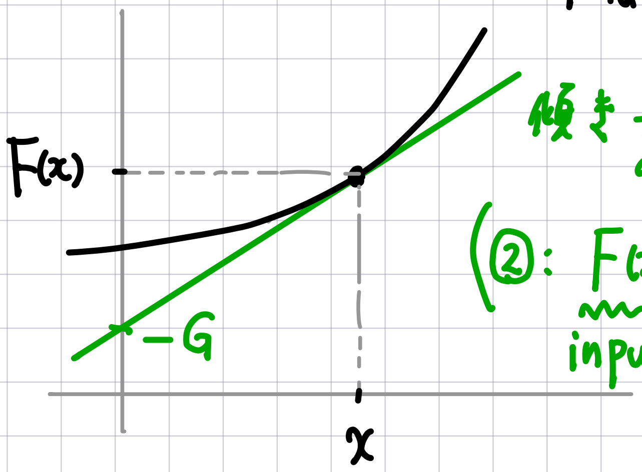
このとき $dG = dx\, y + x\, dy - dF \overset{①}{=} x\, dy - \frac{\partial F}{\partial q} dq$

よって. G は y, q の関数となっている. このとき

$$x = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{\partial G}{\partial q}$$

※図形的意味

F は凸　($\leftarrow \underbrace{\det}_{\text{不要}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \neq 0$)



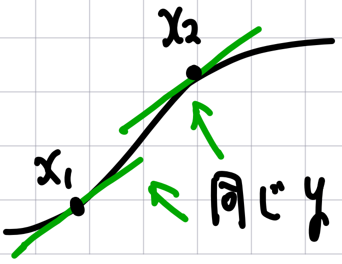
傾き $\frac{\partial F}{\partial x} = y$

(②: $\underbrace{F(x)}_{\text{input}} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{= y} \underbrace{x}_{\text{input}} - G$)

$y \leftarrow$ output, $G \uparrow$ output

F が凸でないと

1対1でなくなる



同じ y (傾き)

∎

この Legendre 変換で $x \equiv \dot{q}$, $y \equiv p$, $F \equiv L$, $G \equiv H$ と同一視すると

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

注1.50
- $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ のとき Hは保存量 (先週の例1.44(iii))
- $\dot{p}_i \overset{E\text{-}L}{=} \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$

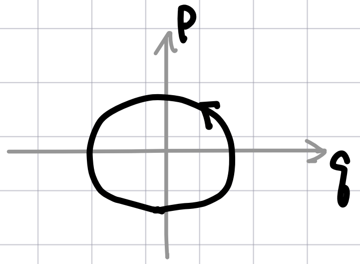
定義1.51
$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$
(q.pに関して対称)

を(ハミルトンの)正準方程式という。(q, p)を正準変数という。
canonical eq. canonical variables

宿題 $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$ のとき正準eq.を書き下せ (正準変数は ($\vec{r}$, $\vec{p}$))

定義1.52 $\{(q, p)\}_{q \in N}$ を相空間(phase sp.)という

※ 現実の運動は相空間内の曲線で表される



〈まとめ〉

Legendre変換(1:1)

	Lagrange形式	Hamilton形式
スカラー関数	$L(q, \dot{q})$	$H(q, p)$
基本方程式	Euler-Lagrange eq (tについて2階)	Hamiltonの正準eq (tについて1階)
幾何学的舞台	接ベクトル束TN	余接ベクトル束T^*N

1.8 正準変換

定義1.53 変数変換 $(q,p)\mapsto(Q,P)$ が正準eq.を不変に保つ

i.e. $^\exists \mathcal{H}(Q,P,t)$ s.t. $\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P},\ \dfrac{dP}{dt}=-\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$

とき、正準変換であるという。

注1.54 このとき、変分原理より、

$$\delta\int\Big(\overbrace{\dot{q}p-H(q,p,t)}^{L}\Big)dt=\delta\int\big(\dot{Q}P-\mathcal{H}(Q,P,t)\big)dt=0$$

⇓ 同じEOMを与える

$$^\exists W=W(q,p,Q,P,t)\ \text{s.t.}\ \dot{q}p-H=\dot{Q}P-\mathcal{H}+\overbrace{\frac{dW}{dt}}^{t\text{積分で定数}}$$

⇓

$$dW=p\,dq-P\,dQ+(\mathcal{H}-H)\,dt \qquad \cdots \text{(i)}$$

より $W=W_1(q,Q,t)$ と考えられる。このとき、以下が得られる：

$$p=\frac{\partial W_1}{\partial q},\quad P=-\frac{\partial W_1}{\partial Q},\quad \mathcal{H}=H+\frac{\partial W_1}{\partial t} \qquad \cdots \text{(I)}$$

定義1.55 (I)を、W_1を母関数とする正準変換という

注1.56 (i)は以下のようにも表すことができる：

$$\begin{aligned}dW &= p\,dq-d(PQ)+Q\,dP+(\mathcal{H}-H)\,dt &&\cdots \text{(ii)}\\ &= d(pq)-q\,dp-P\,dQ+(\ 〃\ )\,dt &&\cdots \text{(iii)}\\ &= d(pq-PQ)-q\,dp+Q\,dP+(\ 〃\ )\,dt &&\cdots \text{(iv)}\end{aligned}$$

(ii)~(iv)に対応した正準変換(II)~(IV)が定義される：

	母関数	q	p	Q	P	$\mathcal{H}-H$
(I)	$W_1(q,Q,t)$		$\frac{\partial W_1}{\partial q}$		$-\frac{\partial W_1}{\partial Q}$	$\frac{\partial W_1}{\partial t}$
(II)	$W_2(q,P,t)=W_1+PQ$		$\frac{\partial W_2}{\partial q}$	$\frac{\partial W_2}{\partial P}$		$\frac{\partial W_2}{\partial t}$
(III)	$W_3(Q,p,t)=W_1-pq$	$-\frac{\partial W_3}{\partial p}$			$-\frac{\partial W_3}{\partial Q}$	$\frac{\partial W_3}{\partial t}$
(IV)	$W_4(p,P,t)=W_1-pq+PQ$	$-\frac{\partial W_4}{\partial p}$		$\frac{\partial W_4}{\partial P}$		$\frac{\partial W_4}{\partial t}$

(例) (I) $(x,p)\mapsto(\phi,P)$ を、$W_1(x,\phi)=\frac{A}{2}x^2\underbrace{\cot\phi}_{=\frac{1}{\tan\phi}}$ を母関数とする正準変換とする。このとき、

$$p=\frac{\partial W}{\partial x}=Ax\cot\phi\,,\quad P=-\frac{\partial W}{\partial\phi}=\frac{A}{2}x^2\frac{1}{\sin^2\phi}$$

$$\therefore\quad \frac{p^2}{2A}+\frac{A}{2}x^2=P\quad\cdots③\,,\qquad \frac{p^2}{P}=2A\cos^2\phi$$

$$\therefore\quad p=\sqrt{2AP}\cos\phi\,,\quad x=\frac{p}{A}\tan\phi=\sqrt{\frac{2P}{A}}\sin\phi\quad\cdots④$$

特に $H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{m\omega^2}{2}x^2$ (調和振動子) のとき、

$$\mathcal{H}=H\underset{A=m\omega}{\overset{③}{=}}\omega P$$ (変換後のハミルトニアンがシンプル!)

正準 eq. $\frac{dP}{dt}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}=0\,,\quad \frac{d\phi}{dt}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P}=\omega$

$$\therefore\quad P=\text{const}\,,\quad \phi=\omega t+\alpha$$

④より
$$\begin{cases} p=\sqrt{2m\omega \underset{\text{定数}}{P}}\cos(\omega t+\alpha) \\ x=\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin(\omega t+\alpha)\end{cases}$$