1.6 対称性と保存則

'22 5/20

自由度 n の N 質点システム $L(q,\dot{q},t)$ を考える　← $q^i, \dot{q}^i$ を略記

EL eq. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad i \in \{1,\cdots,n\}$

ラグランジアン $L = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} - U(\vec{r},t) = K(q,\dot{q},t) - U(q,t)$

定義1.37 $\dfrac{d}{dt}Q(q,\dot{q},t) = 0$ を保存則といい，Q を保存量という

定義1.38 $p_i := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ を（q^i に共役な）一般化運動量という

(例) (i) Cartesian座標 $\vec{r} \rightsquigarrow \vec{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}$ （普通の運動量）

(ii) 極座標 $\varphi \to p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = L_z$

（角運動量の z 成分）

定義と命題1.39

q^m : 循環座標 (cyclic coord.) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \dfrac{\partial L}{\partial q^m} = 0$ （L に q^m が陽に入っていないということ）

このとき $p_m = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}$ は保存量 ($\because$ EL eq.)

注1.40 q^i をうまく選んで，できるだけ多くの cyclic coords. を見つけると解きやすくなる．

（EoM は2階の微分 eq.　Q = 一定 は1階 〃）

定義1.41 ある変数変換 $q(t) \mapsto q'(t)$ で

Lの関数形が不変であるとき，システムはその変換に対して対称性をもつという．← $L(q',\dot{q}',t) = L(q,\dot{q},t)$

(例) (i) L が x^m を陽に含まないとき, システムは x^m方向への平行移動に関して対称性をもつ　$x^m \mapsto x^m + a^m$

(ii) L が方位角 φ を陽に含まないとき、システムは z軸まわりの回転に関して対称性をもつ

$\varphi \mapsto \varphi + \alpha$

☆前ページの(例)&1.39と合わせると「(対称性) ⇒ (保存則)」が示唆

定理 1.42 (ネーターの定理)

ε を無限小パラメータとする微小変換

$$q^i(t) \mapsto q'^i(t) = q^i(t) + \varepsilon f^i(q, \dot{q}, t) \quad \cdots (*)$$

の下で $L(q, \dot{q}, t)$ が不変ならば, 以下の Q は保存量:

← Einstein の規約

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} f^i \quad : \text{ネーターチャージ}$$

∵ $\delta q^i = \varepsilon f^i$ と書くと (先週と同様のギロンにより)

$$\delta L(q, \dot{q}, t) = L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i$$

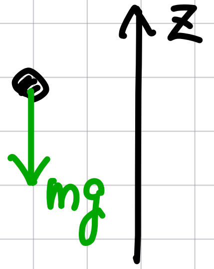
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \underbrace{\delta q^i}_{\varepsilon f^i}\right) - \underbrace{\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right\}}_{\underset{0}{\parallel}\ \text{EL eq.}} \delta q^i \underset{L\text{不変}}{=} 0 \quad ▨$$

系 1.43 上記の変換 $(*)$ に対して $\delta L = \varepsilon \frac{d}{dt} Y(q, \dot{q}, t)$

となるとき, L は準不変であるという. このとき $Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} f^i - Y$ は保存量

☺ 宿題 これを示せ

(例) 一様な重力の下での質点の鉛直方向の運動



$$L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$$

$z \mapsto z + \varepsilon$ なる変換で $\delta L = -\varepsilon \frac{d}{dt}(mgt)$

$$Q = m(\dot{z} + gt) \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = 0$$

← EOM: $m\ddot{z} = -mg$

例1.44 以下の変換の下, L が不変とする.

(i) 空間並進 $\vec{r}_\alpha \mapsto \vec{r}_\alpha' = \vec{r}_\alpha + \varepsilon \vec{n}$ … ①

$\vec{f}_\alpha = \vec{n}$ より $Q = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha} \cdot \vec{f}_\alpha = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \vec{n}$ (∝ 全運動量の $\vec{n}$ 方向成分)

(ii) 空間回転 $\vec{r}_\alpha \mapsto \vec{r}_\alpha' = R(\theta)\vec{r}_\alpha$ (z軸まわりとする)

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{無限小}}{\overset{\theta=\varepsilon}{=}} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{O(\varepsilon^2)}_{\text{無視}}$$

$$\begin{pmatrix} x_\alpha' \\ y_\alpha' \\ z_\alpha' \end{pmatrix} = \left\{ \left(\quad \text{〃} \quad \right) + \varepsilon \left(\qquad \right) \right\} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} + \varepsilon \overbrace{\begin{pmatrix} -y_\alpha \\ x_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}^{\vec{f}_\alpha}$$

$$Q = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \vec{f}_\alpha = \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha)_{z\text{成分}} = \sum_\alpha (\vec{L}_\alpha)_{z\text{成分}}$$

← 角運動量

(iii) 時間並進 $t \mapsto t' = t + \varepsilon$ (素朴にギロンする)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}_{p_i}\dot{q}^i\Big) - \underbrace{\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right\}}_{=0 \ \text{E-L eq.}}\dot{q}^i$$

∴ $H := p_i \dot{q}^i - L$ は保存量

←「ハミルトニアン」

(注) $K = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2}$ のとき $H = K + U$ (全エネルギー)