1.5 微分形式(付録的内容)

'22 5/14

$(x^1, \cdots, x^n)$: $\mathbb{R}^n$の座標

$U \subset \mathbb{R}^n$: 開集合とする

以後単に「p-form」と呼ぶ

定義 1.30 U上の微分p形式とは、以下で定義される外積代数の元である：

U上のC^∞関数

$(x^1, \cdots, x^n)$の略記

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \cdots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \in \Omega^p(U)$$

$\wedge$: wedge積と呼ぶ

$$(*) \begin{cases} dx^i \wedge dx^i = 0 \\ dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \end{cases}$$

(例) $\mathbb{R}^3$のとき

0-form : $\omega_0 = f$ (関数)

1-form : $\omega_1 = f_i\, dx^i = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3$

2-form : $\omega_2 = f_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 + f_{13}\, dx^1 \wedge dx^3 + f_{23}\, dx^2 \wedge dx^3$

3-form : $\omega_3 = f_{123}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

定義 1.31 外微分 $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$ は以下で定義される：

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

← Einsteinの規約が用いられている

↑関数

$$d\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} df_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

↑ 1.30のω_p

命題 1.32 $d \circ d = 0$

例 1.33 $\mathbb{R}^3$のとき

まず記号の導入：

関数

$$\mathrm{grad}\, f := \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{f} := \nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}, \frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1}, \frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right)$$

$$\mathrm{div}\, \vec{f} := \nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{\partial f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}$$

外微分（ω_pは前ページの(例)のもの）

- $d: \Omega^0 \to \Omega^1$

iについて和

$$d\omega_0 = df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = (\mathrm{grad}\, f) \cdot d\vec{x}$$

- $d: \Omega^1 \to \Omega^2$

i, jについて和

$$d\omega_1 = df_i \wedge dx^i = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

$$= (\mathrm{rot}\, \vec{f}) \cdot d\vec{S} \quad ① \qquad \vec{S} := \begin{pmatrix} dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^3 \wedge dx^1 \\ dx^1 \wedge dx^2 \end{pmatrix}$$

(※)に注意

- $d: \Omega^2 \to \Omega^3$

$$d\omega_2 = \mathrm{div}\, \vec{f'}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad \vec{f'} \simeq \begin{pmatrix} f_{23} \\ -f_{13} \\ f_{12} \end{pmatrix}$$

②

まとめると

宿題 ①, ②を示せ（ω_2は前ページのもの）

$$\Omega^0 \xrightarrow[\mathrm{grad}]{d} \Omega^1 \xrightarrow[\mathrm{rot}]{d} \Omega^2 \xrightarrow[\mathrm{div}]{d} \Omega^3$$

$$d^2 = 0 \iff \mathrm{rot}\, \mathrm{grad} = 0 \quad \text{(勾配のうずはゼロ)}$$

$$\mathrm{div}\, \mathrm{rot} = 0 \quad \text{(うずの湧き出しはゼロ)}$$

命題1.34 (ポアンカレの補題)

$U \subset \mathbb{R}^n$: 単連結とする

U上のp-formが $d\omega_p = 0$ をみたす $\Rightarrow$ $^\exists \eta_{p-1} \in \Omega^{p-1}$ s.t. $\omega_p = d\eta_{p-1}$

(例) $\vec{F}$が保存力 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = -\mathrm{grad}\,^\exists U$

$\left(\begin{array}{c} F = F_i dx^i \\ \text{1-form} \end{array} \right)$ 実は $\left(\begin{array}{c} \Updownarrow \\ dF = 0 \end{array} \right) \overset{1.34}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{c} \Updownarrow \\ F = -d\,^\exists \underset{\text{0-form}}{\underline{U}} \end{array} \right)$ (cf. ノートP2)

定理1.35 (一般ストークスの定理)

$\mathbb{R}^n$のp次元領域Dとその境界∂Dに向きがつけられるとき

$$\int_D d\omega_{p-1} = \int_{\partial D} \omega_{p-1}$$

例1.36

(i) D = 曲線, ∂D = 点A, B  , $\omega_0 = f$

$$\int_C df = f(B) - f(A) \quad \text{(微積分の基本定理)}$$

(ii) $D = \mathbb{R}^2$内の2次元領域, $\partial D = C$ (閉曲線), $\omega_1 = f_1 dx^1 + f_2 dx^2$

$$\int_D d\omega_1 = \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \int_C f_1 dx^1 + f_2 dx^2$$

(グリーンの定理)

(iii) D: $\mathbb{R}^3$内の曲面, $\partial D = C$ (閉曲線), $\omega_1 = f_i dx^i$

$$\int_D (\mathrm{rot}\,\vec{f}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad \text{(ストークスの定理)}$$

(iv) D: $\mathbb{R}^3$の3次元領域, $\partial D = S$ (閉曲面), $\omega_2 = J_1 dx^2 \wedge dx^3 + J_2 dx^3 \wedge dx^1 + J_3 dx^1 \wedge dx^2$

$$\int_D (\mathrm{div}\,\vec{J}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{(ガウスの定理)} \quad \vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$$