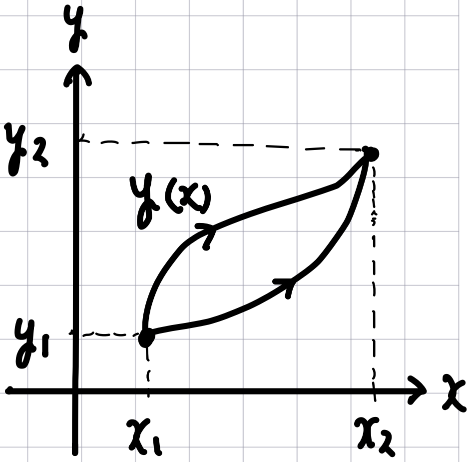
1.4 変分原理

$y = y(x)$: (C^∞級) 実関数 (「$\mathbb{R}^2$の経路」と呼ぶ)

以下の汎関数(functional)を考える

$$S[y] := \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx \in \mathbb{R}, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$



定義1.21 $S[y]$の極大・極小を与える経路yを停留曲線(stationary curve)という. y_*と書く

$y_1 := y(x_1)$, $y_2 := y(x_2)$を固定したSの「変分」を考える.

問 $y(x) = y_*(x) + \underbrace{\delta y(x)}_{\text{無限小}}$ としたとき "$\dfrac{\delta S}{\delta y}$" は? (汎関数微分)

答 $\delta y(x) = \underbrace{\varepsilon}_{\text{無限小パラメータ}} \eta(x)$, $\eta(x)$: 任意関数

(ただし $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$: b.c. (boundary condition))

と表してみよう。このとき $S = \underbrace{S(\varepsilon)}_{\varepsilon\text{の普通の関数}}$ と考えられる

命題1.22 y_*が停留曲線 $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0$

☺ $S \overset{=}{} S[y_* + \varepsilon\eta]$ が $\varepsilon = 0$ で極値:

$$0 = \frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\dot{\eta}\right]$$

部分積分

$\leftarrow f(y+\varepsilon\eta, \dot{y}+\varepsilon\dot{\eta}, x)$
$\parallel$ Taylor
$f(y, \dot{y}, x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\varepsilon\eta + \dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}}\varepsilon\dot{\eta} + O(\varepsilon^2)$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right]}_{=0} \underbrace{\eta}_{\text{任意}} + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\eta\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0\ (\text{b.c.})} \qquad \blacksquare$$

※ 使ってくると

∵ $\delta S[y] = S[y+\delta y] - S[y] \Big|_{\delta y \text{の1次}}$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y} \right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \right]}_{=0} \underbrace{\delta y}_{\text{任意}} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{(\text{表面項})}}$$

■

注1.23 $y \rightsquigarrow (y^1, \cdots, y^n)$ 多変数化は同様

定義1.24 $y^i = y^i(x)$: $\mathbb{R}^{n+1}$ の経路 $(i \in \{1, \cdots, n\})$

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i}\right) = 0$$

をオイラー eq. という.
(Euler) eq. = equation (方程式)

$[y^1, \cdots, y^n]$

今日の宿題: $S[y^i]$ の (端点を固定したときの) 停留曲線を与える式 がオイラー eq. であることを示せ (上記のギロンを多変数化するということ)
(アインシュタインの規約を用いることを勧める)

注1.25 特に, $x \to t$ (時間), $y^i(x) \to q^i(t)$ (一般化座標),
$f(y^i, \dot{y}^i, x) \to L(q^i, \dot{q}^i, t)$ のおきかえで オイラー eq. はラグランジュ eq. と一致!

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$$

: オイラー・ラグランジュ eq. という (E−L)

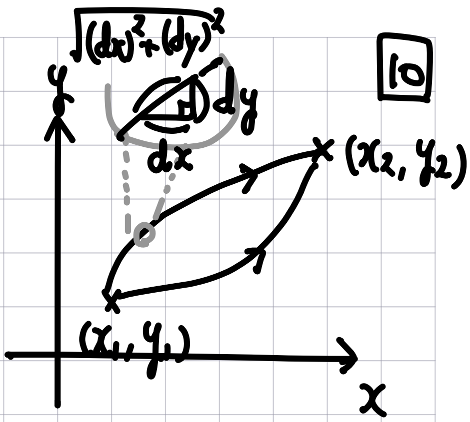
系1.26 (ハミルトンの原理)

N 質点のシステムが現実にとる経路は
作用積分 (action integral) $S := \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q^i, \dot{q}^i, t)$ の停留曲線である.

例1.27 $\mathbb{R}^2$上 最短距離を与える経路 y_*?

$$S=\underbrace{\int}_{\text{Sum}}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2}dx\underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}_{f(y,\dot y,x)}$$

ピタゴラスより

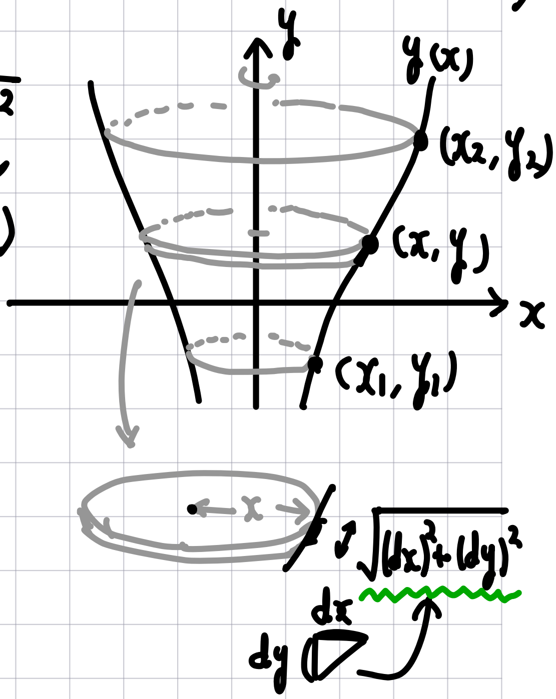


Euler eq. $\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot y}\right)=0 \Rightarrow \dot y = a\ (\text{const}) \Rightarrow y=\underset{\sim}{a}x+\underset{\sim}{b}$ (直線)

積分定数 (b.c.から決まる)

例1.28 回転体の極小曲面 (表面積を極小にする y_*?)

$$S=\int 2\pi x\underbrace{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}_{\text{(右下図)}} = 2\pi\int_{x_1}^{x_2}dx\,\underbrace{x\sqrt{1+\dot y^2}}_{f(y,\dot y,x)}$$



Euler eq.

$$0=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot y}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x\dot y}{\sqrt{1+\dot y^2}}\right)$$

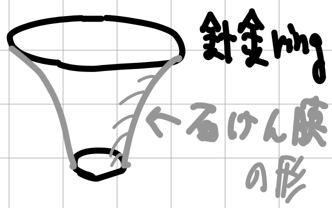
$$\therefore\ \frac{x\dot y}{\sqrt{1+\dot y^2}}=a \qquad \therefore\ \dot y^2=\frac{a^2}{x^2-a^2}$$

$$\therefore\ dy=\frac{a\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \overset{x=a\cosh\xi}{=} a\,d\xi$$

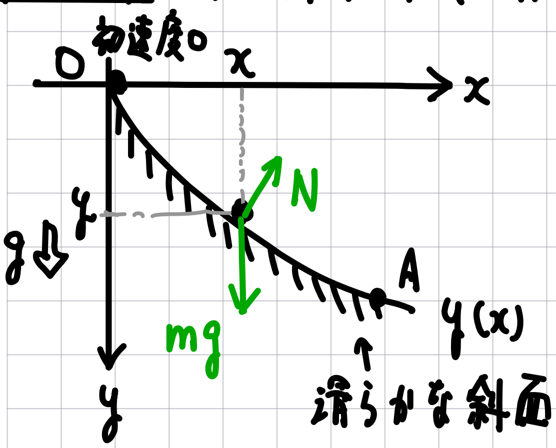
(積分定数 a,b は b.c.から決まる)

$$\therefore\ y=a\xi+b \qquad \therefore\ x=a\cosh\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

: catenary 懸垂曲線



例1.29 最速降下線 (レポート)



所要時間 $t_{O\to A}$ が最短となる経路 y_*?

$$S=\int\frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{v} \qquad \left(\frac{1}{2}mv^2=mgy\right)$$

[Hint] $f=f(y,\dot y)$ のとき $\dot y\frac{\partial f}{\partial \dot y}-f=\text{const.}$

(答) cycloid $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$