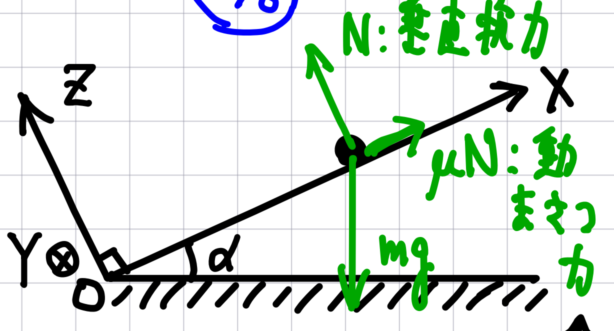
例1.12 斜面での運動 (動まさつ係数 = $\overset{\text{ミュー}}{\mu}$)

'22 5/6

$\vec{v}(0)=\vec{0}$ からの滑落の場合 $(Y=0)$:

$$\text{EOM}\begin{cases} m\ddot{X} = -mg\sin\alpha + \mu N \\ m\underbrace{\ddot{Z}}_{\substack{\parallel \\ 0}} = N - mg\cos\alpha \end{cases}$$

← 斜面上に拘束: $Z=0$



↑ 非保存力

拘束面 〃 XY平面 ($Z=0$) 自由度が 拘束条件1つ ⇔ 1つ減る

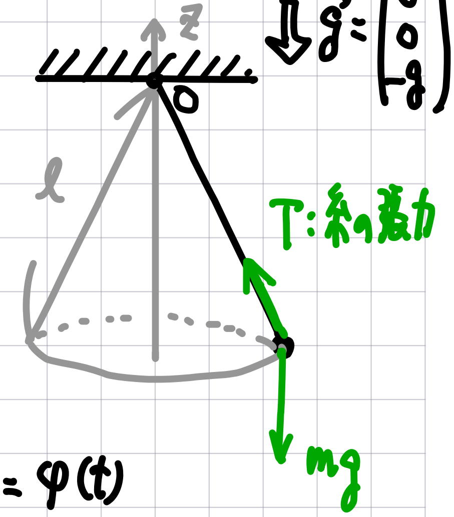
注 Nは未知変数で拘束条件から決まる

例1.13 球面振り子

$$\text{EOM}\quad m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{T}, \qquad \vec{T} = -T\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

拘束面 〃 半径ℓの球面 S^2_ℓ ($|\vec{r}|=\ell$) 拘束条件1つ

$$\Downarrow \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$



$$\text{極座標}\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$\theta=\theta(t),\ \varphi=\varphi(t)$ 力学変数 (2つ)

整理すると

$$\begin{cases} m\ell(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) = mg\cos\theta + T \\ m\ell(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2) = mg\sin\theta \\ m\ell(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

← Tを決める式 ← 宿題 これを示せ

] 運動を決める式

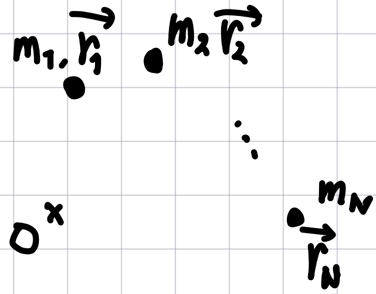
★ 拘束力 N, T を (はじめから) 消去し、拘束面上で EOM を考えたい ⟶ 一般化座標

★ 座標のとり方によらない定式化をしたい ⟶ 解析力学

1.2 仮想変位、ダランベールの原理

・N個の質点からなるシステム(system)を考える.

EOM : $m_\alpha \dfrac{d^2\vec{r}_\alpha}{dt^2} = \vec{F}_\alpha$　　$\alpha = 1,\cdots,N$



$\vec{x} := (\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N)$: N質点の座標
$(m_1,\cdots,m_N)$: 〃 質量

・このシステムに以下の独立な拘束条件が与えられたとする

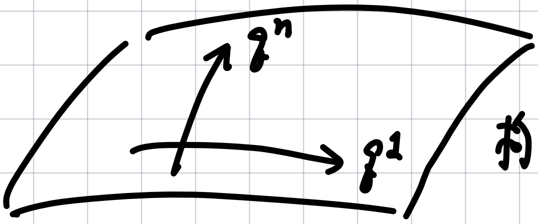
$$f_s(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N,t) = 0 \qquad s = 1,\cdots,p$$

このとき(3N−p)個の独立なパラメータを用いて

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q^1,\cdots,q^n,t) \quad (=: \vec{r}_\alpha(q,t)\text{ と略記})$$

とパラメトライズできる。

$\mathbb{R}^{3N}$



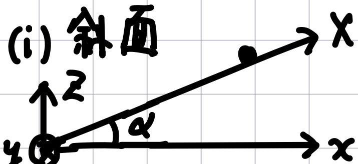
拘束面N　(dim N = n = 3N − p)

定義1.14 $N = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^{3N} \mid f_s(\vec{x},t) = 0,\ s = 1,\cdots,p\}$ を配位空間(configuration space)という.

$(q^1,\cdots,q^n)$ を一般化座標という. (n : システムの自由度)

例1.15 (cf. 前ページ)

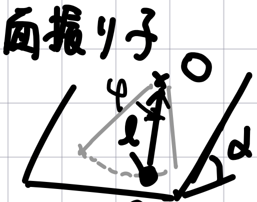
(i) 斜面



$f_1(\vec{r}) = z - \tan\alpha\cdot x = 0$
自由度2, $q^1 = X$, $q^2 = Y$
N = XY平面　($\overset{'''}{Y}$)

(ii) 球面振り子
$\tilde{f}_1(\vec{r}) = |\vec{r}| - l = 0$
自由度2
$q^1 = \theta$, $q^2 = \varphi$
N = S^2 (球面)

(iii) 斜面振り子



$f_1(\vec{r}) = 0$, $\tilde{f}_1(\vec{r}) = 0$
自由度1, $q^1 = \varphi$. N = S^1

・以後 EoMの右辺の力は保存力と拘束力のみと仮定(理想化):

改めて、$\vec{F}_{\alpha;\mathrm{total}} = \underbrace{\vec{F}_\alpha}_{\text{保存力}} + \underbrace{\vec{F}'_\alpha}_{\text{拘束力}}$ と書く

(拘束面と垂直!)

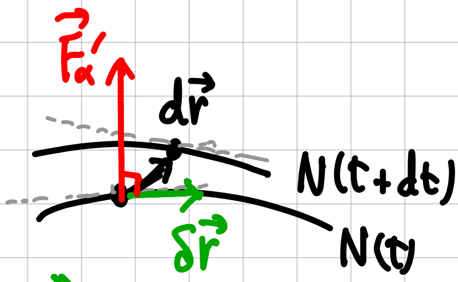
定義1.16 拘束面N上での無限小変位を仮想変位といい、以下で表す

$$\delta\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}\delta q^i \quad \left(:= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}\delta q^i \ : \ \text{Einstein の規約} \right)$$

同じ添字が単項式の中にあるときは和がとられていると約束

注1.16 $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q^i, t)$ の全微分

$$d\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}dq^i + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}dt}_{\text{ここが違う}} \quad \cdots ①$$



"tを止めて全微分"

命題1.17 (ダランベールの原理)
d'Alembert

$$\sum_\alpha \left\{ (\vec{F}_\alpha - m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \right\} \delta q^i = 0$$

☺ $\vec{F}'_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0$ (拘束力のする(仮想)仕事はゼロ)

拘束力 ↖内積

$\vec{F}'_\alpha \overset{\text{EOM}}{=} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha$ ← 保存力

例1.18 球面振り子 $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - \frac{T}{l}\vec{r}$ (例1.13)

$$(m\vec{g} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \underline{ml^2(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2) - mgl\sin\theta} \right\} \delta\theta \quad (=0 \Leftrightarrow \text{EoM})$$

$$+ \underline{ml^2(\sin^2\theta\,\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta})}\,\delta\varphi = 0 \quad (=0)$$

同じ結果(Tは自動的に排除)

※ $\delta\theta, \delta\varphi$ は $T_q N$ の基底

1.3 ラグランジュ形式の力学

保存力 $\vec{F}_\alpha = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha}$ 　 $\left(\dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} := \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \nabla \text{ とも書く} \right)$

nabla (ナブラ)

ポテンシャル・エネルギー $U = U(q, t)$

運動エネルギー $K = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} = K(q, \dot{q}, t)$

定義1.19 $L(q, \dot{q}, t) := K - U$ をラグランジアン (Lagrangian) という

定理1.20 EoM は単一のスカラー関数 L だけを用いて以下のように書ける

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

ここにシステムの情報がすべて入っている

これをラグランジュ方程式という.

(証) ダランベール: $\sum_\alpha (m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha) \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_\alpha \left\{ \frac{d}{dt}\Big(m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}}_{=\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}^i}}\Big) - m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}\right)}_{=\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q^i}} \right\} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \quad \cdots (*)$$

①より
$\dot{\vec{r}}_\alpha = \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \dot{q}^i + \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}$
両辺 $\dot{q}^i$ で偏微分

$$\therefore (*) \text{の左辺} = \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}^i}\right) - \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q^i}$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\Big(\underbrace{\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha}_{K}\Big)\right\} - \frac{\partial}{\partial q^i}\Big(\underbrace{\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha}_{K}\Big)$$

$$(*) \text{の右辺} = \sum_\alpha \left(-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i}$$

$\left(\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}^i} = 0 \text{ に注} \right)$ ▨