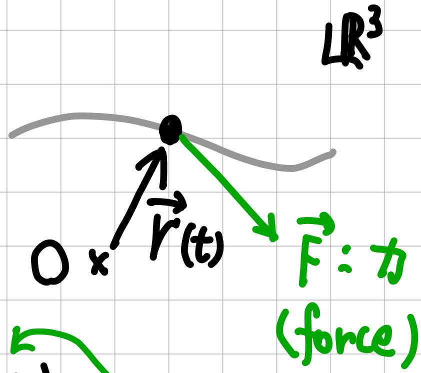
'22 4/22

§1 古典力学

1.1 Newton力学

舞台：$\mathbb{R}^3$



物体の$\mathbb{R}^3$内での運動を考える

- 位置(position) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

特に断りがない限り関数はすべてC^∞級

- 速度(velosity) $\vec{v}(t) := \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)$ $\left(= \dot{\vec{r}}\text{ とも書く}\right)$
- 加速度(acceleration) $\vec{a}(t) := \dfrac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

[※担当教員が r でなく $\vec{r}$ を用いる理由: $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$]

<u>法則 1.1</u> (Newtonの運動法則)

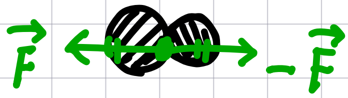
(I) (慣性の法則) 物体に力が加わらなければ、物体は等速直線運動を続ける。(特に静止している物体は静止したままである。)

(II) (<u>運動方程式</u>) 物体に力$\vec{F}$が加わると、以下をみたす加速度$\vec{a}$が生じる。

Equation of Motion (=EOM)

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (m\text{：質点の質量(mass)})$$

(III) (作用・反作用の法則) 2つの物体間にはたらき合う力は大きさが等しく、向きが互いに逆である。



<u>定義 1.2</u> 慣性の法則が成り立つ座標系を慣性系(inertial frame)という

<u>注 1.3</u>
- 法則(I)は慣性系の存在を保証する命題
- 法則(III)は質量の定義に用いられた(by Mach)
- 物質(物体)と力は別物(二元論) (力の起源は「場」)

定義1.4 運動量 $\vec{p} := m\vec{v}$

注1.5 EOM $\Leftrightarrow$ $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ $\Rightarrow$ $\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt}^{\text{力積}}$

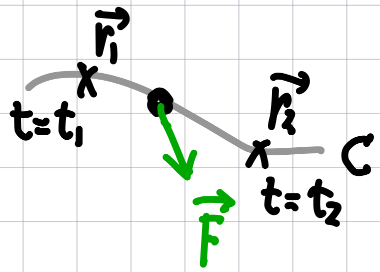
定義1.6 角運動量 $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$ ←ベクトルの外積

力のモーメント $\vec{N} := \vec{r} \times \vec{F}$

$\Big\} \underset{\text{EOM}}{\Longrightarrow} \dot{\vec{L}} = \vec{N}$

定義1.7 $\vec{r}_1$から$\vec{r}_2$へ経路Cに沿って物体が運動するとき$\vec{F}$がする仕事

$$W := \int_{C\,\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{“内積”}} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$



定義1.8 力$\vec{F}$のする仕事が始点$\vec{r}_1$と終点$\vec{r}_2$だけで決まり、途中の経路Cによらないとき、$\vec{F}$を保存力(conservation force)という。

このとき

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underset{m\ddot{\vec{r}}}{\underset{\shortparallel}{\vec{F}}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) dt$$

← EOM

$$= K(t_2) - K(t_1), \quad K(t) := \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2m} \vec{p}^2$$

← $\vec{a}^2 := \vec{a} \cdot \vec{a}$ 略記

運動エネルギー(kinetic energy)

命題1.9 $\vec{F}$: 保存力

$\Leftrightarrow \exists U(\vec{r})$ s.t. $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$ $\quad \nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

力のポテンシャル　　ナブラ(nabla)

ポアンカレの補題 ☒ $\left(\overset{\text{このとき}}{U(\vec{r})} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{(経路によらない)} \right)$

← 基準点(s.t. $U(\vec{r}_0) = 0$)

系1.10 物体に働く力が保存力

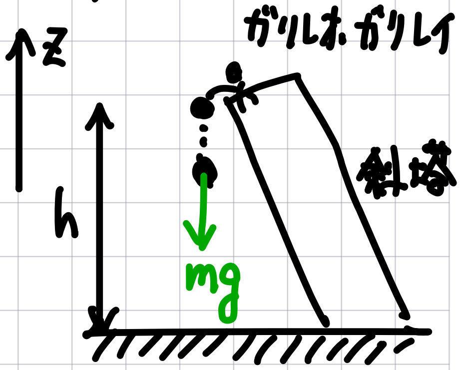
$\Rightarrow W = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = K(t_2) - K(t_1)$

すなわち全エネルギー $E := K + U$ は保存する(エネルギー保存則)

例1.11 物体の落体運動（初期条件 $t=0$ で $\vec{r}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}$, $\vec{v}(0)=\vec{0}$）

(i) 空気抵抗のない場合

〈実験〉



EOM: $m\dfrac{d^2z}{dt^2}=-mg$ (定数)

↓ tで2回積分

$z=C_2+C_1t-\dfrac{1}{2}gt^2$ (一般解)

C_2, C_1: 積分定数

g: 重力加速度

↓ 初期条件より $C_2=h,\ C_1=0$ と決まる

$z(t)=h-\dfrac{1}{2}gt^2,\quad v(t)=-gt$

↓ $z(T)=0$ より

$h=\dfrac{1}{2}gT^2 \iff T=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

(1)を説明! (2)を説明!

ガリレイの実験結果

(1) $h\propto T^2$

(2) Tはmによらない

(T: 地面に落下するまでの時間)

(ii) 速さに比例する空気抵抗力のある場合 (粘性抵抗力)

EOM: $m\dfrac{dv_z}{dt}=-mg-\underbrace{mk}_{\text{比例定数 (ただし } k>0)}v_z$

宿題1 ↓ 微分方程式を解け

$z(t)=h-\dfrac{g}{k}t+\dfrac{g}{k^2}\left(1-e^{-kt}\right),\quad v_z(t)=\dfrac{g}{k}\left(e^{-kt}-1\right)\xrightarrow{t\to\infty}-\dfrac{g}{k}$

一定値 (終端速度)

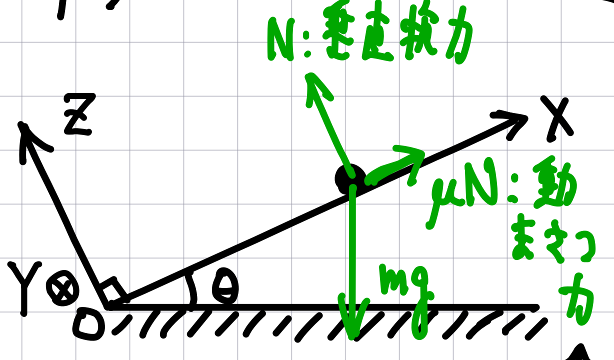
(iii) 速さの2乗に比例する空気抵抗力(慣性抵抗力)のある場合

レポートにします(詳細は後日)

※空気抵抗力は保存力ではない

例1.12 斜面での運動（動まさつ係数 $= \overset{ミュー}{\mu}$）　4

$\vec{v}(0) = \vec{0}$ からの滑落の場合（$Y=0$）:



$$\text{EoM}\begin{cases} m\ddot{X} = -mg\sin\theta + \mu N \\ m\underbrace{\ddot{Z}}_{\parallel\, 0} = N - mg\cos\theta \end{cases}$$

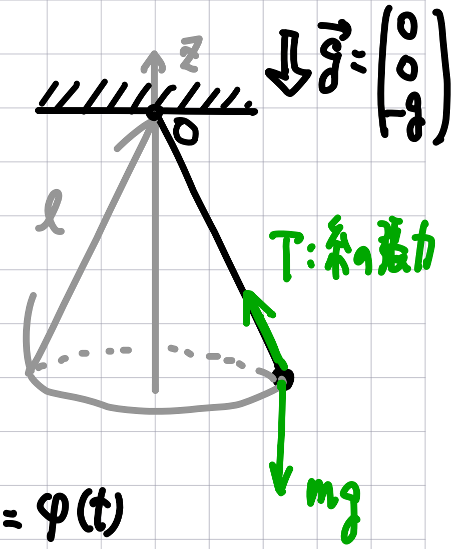
$\leftarrow$ 斜面上に拘束：$Z = 0$

非保存力

注 Nは未知変数で拘束条件から決まる

拘束面 $=$ XY平面（$Z=0$）自由度が拘束条件1つ ⇔ 1つ減る

例1.13 球面振り子



EoM $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \underset{\parallel}{\vec{T}}$

$$\vec{T} = -T\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

拘束面 $=$ 半径 l の球面 S^2_l（$|\vec{r}| = l$）拘束条件1つ

$$\text{極座標}\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ 力学変数（2つ）

整理すると

$$\begin{cases} ml(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) = mg\cos\theta + T \\ ml(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2) = mg\sin\theta \\ ml(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

← Tを決める式

運動を決める式（下の2式）

★ 拘束力 N, T を（はじめから）消去し，拘束面上で EoM を考えたい ⟶ 一般化座標

★ 座標のとり方によらない定式化をしたい ⟶ 解析力学