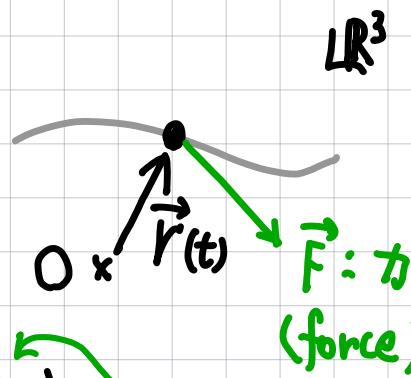


§1 古典力学

1.1 Newton 力学

舞台: \mathbb{R}^3

物体の \mathbb{R}^3 内での運動を考える



22
4/22

・位置(position) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ 算は即ちかどい限り肉眼
はすべく \vec{r} が

・速度(velocity) $\vec{v}(t) := \frac{d\vec{r}}{dt}(t) (= \dot{\vec{r}} \text{ と書く})$ 括弧を省略する
が \vec{v} より \vec{r} が

・加速度(acceleration) $\vec{a}(t) := \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \ddot{\vec{v}}$ ※ 用いられる理由:
 $= \ddot{\vec{r}}$ $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$

法則 1.1 (Newton の運動法則)

(I) (慣性の法則) 物体に力が加わらなければ、物体は等速直線運動を続ける。(特に静止している物体は静止したままである。)

(II) (運動方程式) 物体に力 \vec{F} が加わると、以下の式で示す加速度 \vec{a} が生じる。
Equation of Motion $m\vec{a} = \vec{F}$ (m : 質点の質量(mass))

(III) (作用・反作用の法則) 2つの物体間に働くき合ひの力は大きさが等しく、向きが互いに逆である。 $\vec{F} \leftarrow \text{○○} \rightarrow -\vec{F}$

定義 1.2 慣性の法則が成り立つ座標系を慣性系(inertial frame)

注 1.3 • 法則(I) は 慣性系の存在を保証する命題

• 法則(III) は 質量の定義に用いられた (by Mach)

• 物質(物体)と力の別物(二元論) (力の起源は「場」)

定義1.4 運動量 $\vec{P} := m\vec{v}$

$$\overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}^{\text{力積}}$$

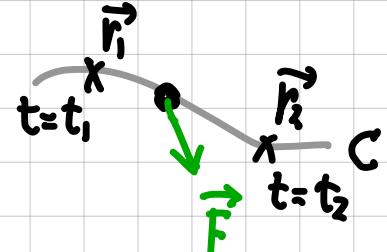
定義1.5 EOM $\dot{\vec{P}} = \vec{F} \Rightarrow \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

定義1.6 角運動量 $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{P}$ ← ベクトルの外積
 力モーメント $\vec{N} := \vec{r} \times \vec{F}$ } $\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \vec{N}$ EOM

定義1.7 \vec{r}_1 から \vec{r}_2 へ 線路 C に沿うと、物体が運動すると \vec{F} がする仕事

$$W := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

"内積" $\approx F_x dx + F_y dy + F_z dz$



定義1.8 力 \vec{F} の仕事を事が始点 \vec{r}_1 を終点 \vec{r}_2 だけ決まり。途中の線路 C はどうかの関係、 \vec{F} が保存力 (conservation force) ならば。

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{r} \cdot \vec{r} \right) dt \\ &\quad \text{EOM} \qquad \qquad \qquad \leftarrow \vec{a}^2 := \vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= K(t_2) - K(t_1), \quad K(t) := \frac{1}{2} m \vec{r}^2 = \frac{1}{2m} \vec{P}^2 \quad \text{ただし} \end{aligned}$$

今題1.9 \vec{F} : 保存力 運動エネルギー (kinetic energy)

$$\Leftrightarrow \exists U(\vec{r}) \text{ s.t. } \vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$$

力のポテンシャル

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

+ こう

(nabla)

$$\textcircled{1} \text{ ポテンシャルの導出 } \left(U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ (経路によらない)} \right)$$

系1.10 物体に働く力が保存力

$$\Rightarrow W = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = K(t_2) - K(t_1)$$

すなむち 全エネルギー $E := K + U$ が保存する (エネルギー保存則)

基準点 (s.t. $U(\vec{r}_0) = 0$)

例1.11 物体の落体運動（初期条件 $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$, $\vec{v}(0) = \vec{0}$ ） [3]

(i) 実験抵抗ありの場合

$$EOM: m \frac{d\vec{z}}{dt^2} = -mg \quad (\text{定数})$$

↓ t^2 2回積分

$$\vec{z} = C_2 + C_1 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{一般解})$$

\uparrow
積分定数

↓ 初期条件より $C_2 = h, C_1 = 0$ となる

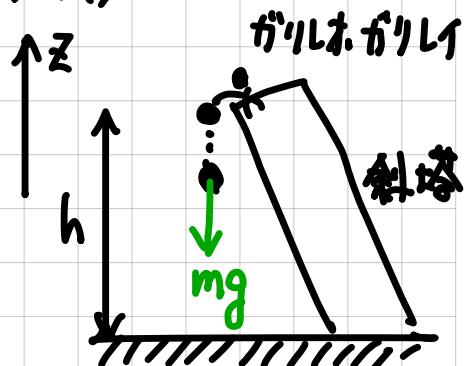
$$\vec{z}(t) = h - \frac{1}{2} g t^2, \quad v(t) = -gt$$

↓ $\vec{z}(T) = 0$ より

$$h = \frac{1}{2} g T^2 \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(1) を説明！

〈実験〉



g : 重力加速度

ガリレイの実験結果

(1) $h \propto T^2$

(2) T は m に比例しない

(T: 地面に落するまでの時間)

(ii) 速さに比例する空気抵抗力のある場合 (粘性抵抗力)

$$EOM: m \frac{dV_z}{dt} = -mg - \frac{m}{k} V_z$$

定理1 ↓ 微分方程式で解け 比例定数 ($k > 0$)

$$z(t) = h - \frac{g}{k} t + \frac{1}{k^2} \left(1 - e^{-kt} \right), \quad V_z(t) = \frac{g}{k} \left(e^{-kt} - 1 \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{g}{k}$$

(iii) 速さの2乗に比例する空気抵抗力 (慣性抵抗力) ある場合 (速度)

レポートにします (詳細は後日)

* 空気抵抗力は保有力ではない

例1.12 斜面での運動(動摩擦係数 = μ)

$\vec{v}(0) = \vec{0}$ 时的初速度为零，即 $v_0 = 0$ 。

$$\text{EoM} \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{X} = -mg\sin\theta + \mu N \\ m\ddot{Z} = N - mg\cos\theta \end{array} \right.$$

The diagram illustrates a block of mass m on an inclined plane. The incline makes an angle θ with the horizontal. A coordinate system is established at the bottom of the incline, with the X -axis parallel to the incline and the Y -axis perpendicular to it. The Z -axis is vertical. The forces acting on the block are:

- Normal force N (green arrow pointing up the incline)
- Friction force μN (green arrow pointing down the incline)
- Gravitational force mg (green arrow pointing vertically downwards)
- Non-conservative force (green arrow pointing up the incline)

The angle θ is labeled between the incline and the horizontal.

注 N は未知変数で拘束条件より決まる XY 平面 ($Z=0$) 自由度が
拘束条件 1つ \Leftrightarrow 1つ減る

例 1.13 球面振子

$$\text{EOM} \quad m \ddot{\vec{r}} = m \vec{g} + \vec{T}$$

村索面

半径 l の球面 S^2_l
 $(|\vec{r}| = l)$
拘束条件 1)

$$\Theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t)$$

力學變數 (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} ml(\ddot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) = mg\cos\theta + T \\ ml(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta \dot{\varphi}^2) = mg\sin\theta \\ ml(\sin\theta \ddot{\varphi} + 2\cos\theta \dot{\varphi} \dot{\theta}) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{← } T \text{ は決める式} \\ \text{運動方程式} \end{array}$$

- * 来力 N, T (はじめから) 消去し、来面上で FOM を考えたい。
→ 一般座標
- * 座標のとり方によりより式化をした。 → 解析力学