§9 超対称量子力学

[ref] 江口徹「超対称性理論入門」大学院素粒子物理 2巻10章(講談社)

'22 1/31

定義9.1 超対称性 (Supersymmetry = SUSYと略す)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 超対称変換 $\left(\begin{array}{l}\text{ボゾン} \mapsto \text{フェルミオン} \\ \text{フェルミオン} \mapsto \text{ボゾン}\end{array}\right)$ の下不変な性質

ボゾンとフェルミオンの共存する簡単な1次元システムを考える:

$$\underset{2\times 2}{H} := QQ^\dagger + Q^\dagger Q \quad (\text{ハミルトニアン}) : \text{エルミート}$$

ただし

$$Q := \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(\frac{d}{dx} + \overset{x\text{ビブン}}{W'}\right)\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\sigma_+}$$

$$Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(\frac{d}{dx} - W'\right)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_-}$$

$$\left(\begin{array}{ll} Q : \mathcal{H}_B \to \mathcal{H}_F & \\ & \text{超対称変換} \\ Q^\dagger : \mathcal{H}_F \to \mathcal{H}_B & \end{array}\right)$$

定常状態の Sch. eq.

$$H\varphi = E\overset{2\text{成分}}{\varphi} \qquad \varphi := \begin{pmatrix} \varphi_F \\ \varphi_B \end{pmatrix} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_F \oplus \mathcal{H}_B$$

フェルミオン (φ_F)、ボゾン (φ_B)

$$H = \frac{1}{2}\Big(\overbrace{-\frac{d^2}{dx^2} + W'^2}^{V:\text{ポテンシャル}}\Big) + \frac{1}{2}W''\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$W(x)$: スーパーポテンシャル

注9.2 $Q^2 = 0,\ Q^{\dagger 2} = 0.$

$$0 \xleftarrow[Q]{} \mathcal{H}_F \underset{Q}{\overset{Q^\dagger}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}_B \xrightarrow{Q^\dagger} 0$$

命題9.3 エネルギー固有値 $E \geqq 0$

$\because$ $E = \langle\varphi|H|\varphi\rangle = \langle\varphi|(QQ^\dagger + Q^\dagger Q)|\varphi\rangle = \big|Q^\dagger|\varphi\rangle\big|^2 + \big|Q|\varphi\rangle\big|^2 \geqq 0$ ■

〈固有状態を調べる〉

(i) $E > 0$ の場合

$|b\rangle \in \mathcal{H}_B$ とする $\Rightarrow$ $H|b\rangle = (QQ^\dagger + Q^\dagger Q)|b\rangle = Q^\dagger Q|b\rangle = E|b\rangle$　　0

$|f\rangle := Q|b\rangle$ とすると $\langle f|f\rangle = \langle b|Q^\dagger Q|b\rangle = E\langle b|b\rangle \neq 0$

$H|f\rangle = HQ|b\rangle = (QQ^\dagger + Q^\dagger \underbrace{Q)Q}_{=0}|b\rangle = Q\,Q^\dagger Q|b\rangle = EQ|b\rangle = \underbrace{E}_{\text{同じ}E}|f\rangle$

$\therefore$ $|b\rangle$ と $|f\rangle$ は必ず対で存在 (SUSYの2次元表現)

(ii) $E=0$ の場合

$^{\exists}|b\rangle \in \mathcal{H}_B$ s.t. $H|b\rangle = 0 \Rightarrow \langle b|Q^\dagger Q|b\rangle = 0 \Rightarrow Q|b\rangle = 0$

$Q^\dagger|b\rangle = 0$

$|f\rangle$ は存在しない
(SUSY の1次元表現)

ボゾニックな零エネルギー状態 $\Leftrightarrow Q|b\rangle = 0$ ←「BPS状態」

$\mathrm{Ker}\,Q$ $\quad$ $\mathrm{Ker}\,Q^\dagger$

フェルミオニックな零エネルギー状態 $\Leftrightarrow Q^\dagger|f\rangle = 0$

この場合「調和形式」と解釈
(H はラプラシアン)

定義 9.4 $\quad \mathrm{index} := \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(-1)^F \qquad F := \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ フェルミオン数 op.

$= \dim \mathrm{Ker}\,Q - \dim \mathrm{Ker}\,Q^\dagger \quad (\equiv n_B - n_F$ と書く$)$

注 9.5 零エネルギー状態が存在する $\Leftrightarrow$ SUSY が保たれている(安定) $\Leftarrow \mathrm{index} \neq 0$

〃 しない $\Leftrightarrow$ SUSY が自発的に破れている $\Rightarrow \mathrm{index} = 0$

〈index の計算〉

$$\left(\frac{d}{dx} \pm W'(x)\right)\varphi_{\substack{B\\F}}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\substack{B\\F}}(x) = Ce^{\mp W(x)}$$

($+$: B, $-$: F)

$|x| \to \infty$ での $W(x)$ のふるまいで規格化可能解の存在が分かる

(i) $W(x) \to \lambda x^{2n}$ (偶数べき) : $\mathrm{index} = \mathrm{sign}(\lambda)$

λ:正 $\Rightarrow \varphi_B$ のみ存在
負 $\Rightarrow \varphi_F$ 〃

(ii) 〃 λx^{2n+1} (奇数べき) : $\mathrm{index} = 0$ (どちらも存在しない)

★ index は $W(x)$ の漸近形で決まる

$W(x) \underset{\varepsilon \to +0}{\to} \frac{1}{\varepsilon}W(x)$ とスケールアップする $\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2\varphi(x) = 0$

H の中で一番 dominant な項

$\Rightarrow$ 波動関数は $W(x)$ の臨界点近傍に局在する

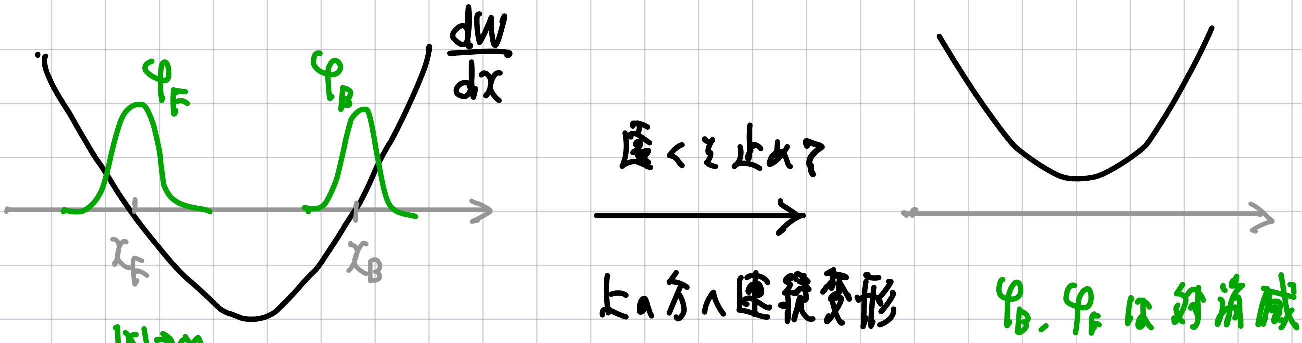
$W(x)$ の臨界点 $x=x_0$ の近傍で $\frac{dW}{dx} \simeq \lambda(x-x_0)$ とふるまうものを考える。このとき

$$H \simeq -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\lambda^2(x-x_0)^2 + \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

λ をスケールアップすると局在する

解: $\begin{cases} \lambda<0 \text{ のとき} & \varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|(x-x_0)^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ フェルミオン} \\ \lambda>0 \text{ のとき} & \varphi(x) = \quad〃 \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ ボゾン}\end{cases}$

例えば $\frac{dW}{dx}$ = 下のような関数形(2次多項式)のとき



$W(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} x^3$ より $\varphi_{B,F}$ は

真の零エネルギー状態ではない

φ_B, φ_F は対消滅

近似的零エネルギー波動関数

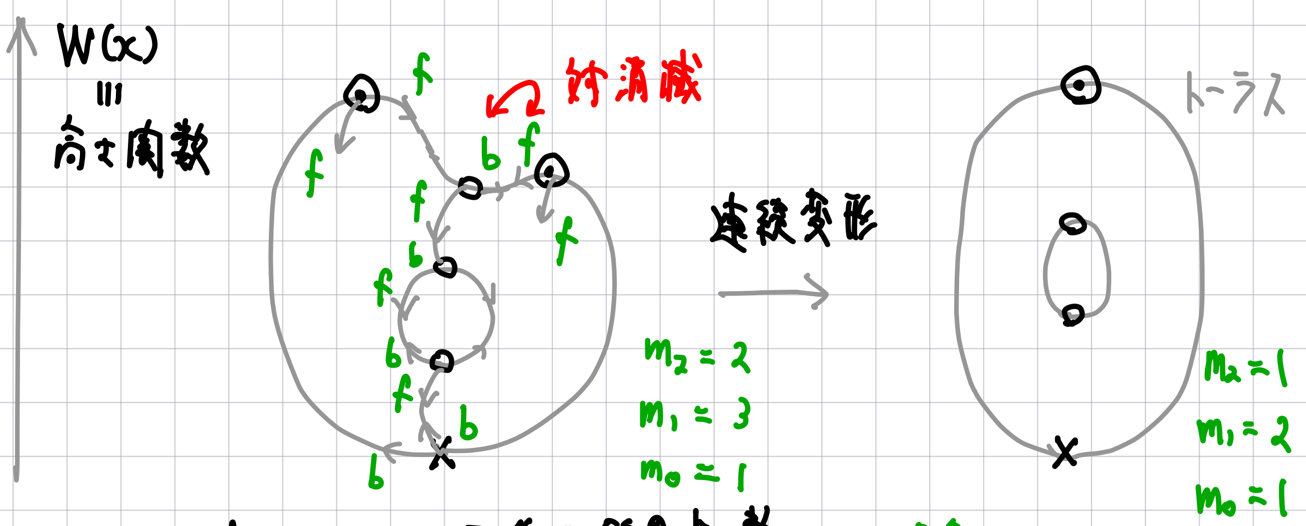
注：対消滅はボゾンとフェルミオンの対で起こる

⇝ index は $W(x)$ の臨界点での近似的零エネルギー波動関数の数 n_B', n_F' から分かる

〈Wittenのモース理論(お話)〉

従来のモース理論：多様体 M に高さ関数 $h(x)$ を乗っけて臨界点での情報から M のトポロジーを知る

Wittenのモース理論：M に超対称理論を丸ごと乗っけて、スーパーポテンシャル W ($\equiv$ 高さ関数) の臨界点での情報から物理量を知る



$m_p :=$ fermion が p 匹住む臨界点の数

$$\text{index} = \mathrm{Tr}(-1)^F = \sum_p (-1)^p m_p = \sum_p (-1)^p b_p = \chi(M)$$
：オイラー数!

b_p：p次ベッチ数(調和形式の数)

量子力学山の遠足はいかがだったでしょうか？

(これからがもっと面白いのですが…)

半年間どうもありがとうございました

宿題(今日は1問) この講義に対するご意見・感想などをご自由に述べよ。(今後の授業につながるような建設的・批判的ご意見を歓迎します)