例 6.30

• Maxwell eq. : レポート8 & form は大域的 ⇒ $F_{\mu\nu}, A_\mu, j_\mu$: tensor

$$\begin{cases} \partial^\mu F_{\mu\nu} = -j_\nu \\ \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

← 運動方程式

← ビアンキの恒等式

$j_\mu := (-c\rho, \vec{j})$, $A_\mu := (-\phi, \vec{A})$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

• 相対論的運動方程式 (ミンコフスキー eq.) ← 0成分: $\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$ (仕事率)

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \underset{4元力}{K^\mu} := \left(\frac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{f}, \gamma\vec{f}\right) \xrightarrow{\beta=0で} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{f}$$

: Newtonの運動方程式

cf. [山本・中村] 上巻 P561, [米谷]

宿題2 「テイラー展開せよ」と言われたら"テイラー展開"してはいけません!

⇔ テイラーの公式を用いて展開

(2次方程式をいつでも解の公式を用いているのと同等です)

(解答例) $\frac{1}{1-\beta^2} \underset{等比級数}{\overset{公比\beta^2}{=}} 1+\beta^2+\beta^4+(高次)$ より ← (有限テイラー展開と思えばいつでもOK. 今は $|\beta|<1$ で問題なし)

$f(0)$　偶関数だから奇数べき $=0$

$\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + a\beta^2 + (高次)$ の a を目算で求めて $a = \frac{1}{2}$ ∎

$1+\beta^2+(高次) = \frac{1}{1-\beta^2} = (1+a\beta^2+\cdots)(1+a\beta^2+\cdots)$

(別解) $\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + b\beta^2 + (高次)$ とおくと. 両辺2乗して

$(1-\beta^2)(1+b\beta^2+\cdots)(1+b\beta^2+\cdots) = 1$ ∴ $b = \frac{1}{2}$ ∎

類題 $\log(1+x)$ ($x=0$ まわり) (30秒で答えよ. ヒント: 微分)

宿題1 両辺に行列をかける操作を添字付きで行う

i, j が浮いた足

$g'_{ij} = g_{kl}(R^{-1})^k{}_i (R^{-1})^l{}_j$

↓ 両辺に右から R をかける

$g'_{ij}R^j{}_m = g_{kl}(R^{-1})^k{}_i (R^{-1})^l{}_j R^j{}_m \cdots$

浮いた足 j を縮約

§7 相対論的量子力学

[坂本, 西島, 坂井]

'22 1/24

7.1 クライン・ゴルドン方程式

$$\left(E = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + V \xrightarrow{\text{量子化}} \text{非相対論的量子力学 (Sch. eq.)}\right)$$

← P44 ⑤式

$$E^2 = (c\vec{p})^2 + (mc^2)^2 \rightsquigarrow \text{相対論的量子力学}$$

$$E \mapsto i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_k \mapsto \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$: Lorentz scalar とする !!

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\phi(x) = \left(\left(\frac{\hbar c}{i}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^2 + (mc^2)\right)\phi(x) \quad \cdots ①$$

← ダランベルシアン

$$\Leftrightarrow (\Box - m^2)\phi = 0$$ Klein-Gordon (KG) eq. ($\hbar = c = 1$ とした。以後同様)

(次元解析より $\hbar, c$ は復元可能: $\left(\Box - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0$)

(長さ)$^{-2}$ = (長さ)$^{-2}$ の次元

注7.1
- KG eq. はローレンツ不変
- ϕ はスピン0の粒子を記述 (cf. P32 例5.5)

7.2 ディラック方程式

KG eq は2階の微分 eq. ⇝ 1階の方が本質的?:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \mathcal{H}\psi(x) \quad \cdots ②$$

$$\mathcal{H} = \left(\frac{1}{i}\alpha^j\frac{\partial}{\partial x^j} + \beta m\right), \quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N\end{pmatrix}$$

エルミート　N×N エルミート行列

の形で以下をみたすものを考える:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi(x) = \mathcal{H}^2\psi(x)$$

← KG のものと一致 (cf. ① の右辺)

$$\Rightarrow ③ \begin{cases}\alpha^j\alpha^k + \alpha^k\alpha^j = 2\delta^{jk} \\ \alpha^j\beta + \beta\alpha^j = 0 \\ \beta^2 = 1\end{cases}$$

宿題1　← ③を導け

ミンコフスキー計量

(クリフォード代数の一種)

$$\Leftrightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu} \quad ④$$

(ただし $\gamma^0 := \beta,\ \gamma^k := \beta\alpha^k$)

命題7.2 ③は $N=2,3$ で解なし．$N=4$ でのみ存在：

e.g. $\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$ ←パウリ行列， $\beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} = \gamma^0$ ← Diracのγ行列という $\left(\Leftrightarrow \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}\right)$

② $\overset{N=4}{\Leftrightarrow}$ $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ ：Dirac eq. (1928)　（ψ：4成分）

宿題2
(i) $\hbar, c$ を明記して Dirac eq. を書け
(ii) G（重力定数）, $\hbar, c$ から長さの次元を持つ量を作り，有効数字1ケタでその数値を求めよ．（量子重力の典型的スケールを表す）

注7.3 ・Dirac eq は ローレンツ不変 [坂本]
・ψ は Dirac spinor と呼ばれ，スピン$\frac{1}{2}$の粒子を記述 (例5.5)

例7.4 (簡単な解)

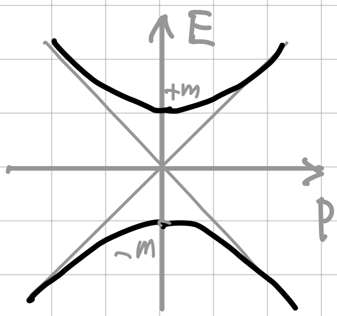
$$\psi_n(x) = u_n(p)\, e^{i\overbrace{(-Et + \vec{p}\cdot\vec{x})}^{p_\mu x^\mu}} \qquad (E^2 = \vec{p}^2 + m^2)$$

↓ 定常状態で H を対角化して固有値問題を解く

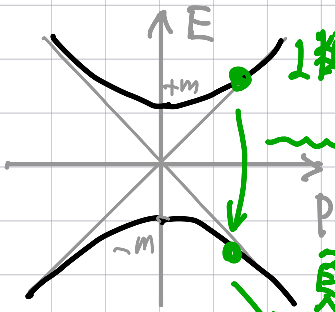
$E = +\sqrt{p^2+m^2}$ ⇝ 2つの固有ベクトル　[西島 P28]

$E = -\sqrt{p^2+m^2}$ ⇝ 2つの固有ベクトル ← 負のエネルギー準位！

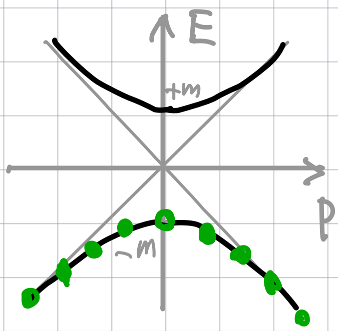
真空の不安定性の問題：



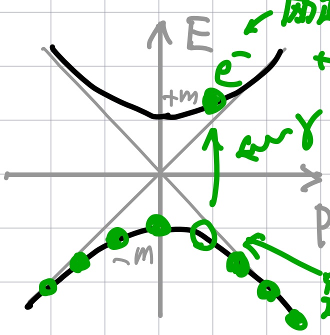
もしも，「真空＝正負の準位とも電子が全くない状態」ならば



Diracの解釈(1930)



真空＝負の準位にぎっしり電子が詰まった状態

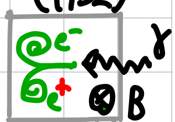


励起状態(電子) $+E, -e$

m は同じ

空孔 $\begin{pmatrix} -E \\ -e\text{不足} \end{pmatrix} \equiv e^+ \begin{pmatrix} +E \\ +e \end{pmatrix}$ 陽電子

アンダーソン (1932)



霧箱

§8 ゲージ原理

8.1 マクスウェルの方程式とゲージ対称性

命題8.1 $A_\mu := (-\phi, \vec{A})$ としたとき Maxwell eq. は以下の変換の下不変:

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda, \quad \cdots (*)$$

$\lambda(x)$: 任意の実関数

これを(電磁場に対する)ゲージ変換と呼ぶ

∵ $F = dA \overset{(*)}{\mapsto} F' = d\overbrace{A'}^{A+d\lambda} = dA = F$ ■

注8.2
・ゲージ変換はローレンツ変換とは独立で(時空ではなく)「内部空間」の対称性を表す
・古典電磁気学では $\vec{E}, \vec{B}$ が主役 (A_μ は「補助的な」場)
・量子論では A_μ も重要な役割を果たす (e.g. アハラノフ・ボーム効果)

原理8.2 (Weyl, 1929年)

電磁場と波動関数 ϕ が相互作用するシステムは以下のように実現される:

・微分 ∂_μ を共変微分 $D_\mu := \partial_\mu + ieA_\mu$ におきかえる
・ϕ のゲージ変換を(*)と合わせて以下のように定義する:

$$\phi \mapsto \phi' \mapsto e^{i\theta}\phi, \quad \cdots (**)$$

$\theta(x) := e\lambda(x)$

このとき $D_\mu\phi \mapsto e^{i\theta} D_\mu\phi$ と共変的に変換する.

∵ $D_\mu\phi \mapsto (\partial_\mu + ieA'_\mu)\phi' = (\partial_\mu + ieA_\mu - \underbrace{ie\partial_\mu\lambda}_{i\partial_\mu\theta}) e^{i\theta}\phi = e^{i\theta} D_\mu\phi$ ■

$i\partial_\mu\theta$ (キャンセル)

例8.3 電磁場と相互作用する(⇔電荷をもった粒子の) Dirac eq.: (P27)

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0$$

[坂本 P99] ↓ 非相対論的極限 & $\psi = e^{-imt}\begin{pmatrix}\xi \\ \chi\end{pmatrix}$

4成分　各2成分

$$i\frac{\partial}{\partial t}\xi(x) = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla + e\vec{A}\right)^2 I_2 + \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} - e\phi I_2\right]\xi(x) \quad \begin{pmatrix}\uparrow 成分 \\ \downarrow 成分\end{pmatrix}$$

スピン$\left(\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\right)$と磁場$\vec{B}$との相互作用項が自然に出てくる!

スピン表示の波動関数!