6.4 物理法則の相対論的定式化

'22 1/17 　　　41

座標変換 $x' = \Lambda x \cdots (*)$ で良いふるまいをする量をdefしたい

定義 6.22 $(*)$ の下（Λ：行列）

$$v'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu}$$ （νについて和）と変換する量を反変vector（x^μと同じ変換性）

$$v'_{\mu} = ({}^{t}\Lambda^{-1})_{\mu}{}^{\nu} v_{\nu} \quad \left(= v_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\right)$$ 〃 共変vector

という（双対）

Λ 行列 上つき（反変成分）下つき（共変成分）

例 6.23
$$\begin{cases} dx^{\mu} : \text{反変 vector} \\ \partial_{\mu} := \dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}} : \text{共変 vector} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V \ni \text{接 vector} = X = X^{\mu} \partial_{\mu} \\ V^{*} \ni \text{余接 vector} = \omega = \omega_{\mu} dx^{\mu} \end{cases} \text{双対}$$

X, ω が座標のとり方によらない $\Leftrightarrow \begin{cases} X^{\mu} : \text{反変} \\ \omega_{\mu} : \text{共変} \end{cases}$

∵ $(\text{共変})_{\mu} (\text{反変})^{\mu} \overset{(*)}{\longmapsto} (\text{共変})_{\nu} \underbrace{(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho}}_{= \delta^{\nu}{}_{\rho}} (\text{反変})^{\rho} = (\text{共変})_{\mu} (\text{反変})^{\mu}$ ∎

〈VとV*の関係をVの内積を用いて議論〉

まず $V = (\mathbb{R}^n, \langle\,|\,\rangle)$ とする（標準内積（⇔ユークリッド空間））

$$\begin{array}{c} V \\ \cup\!\!\!\shortmid \\ x = e_i \, x^i \end{array}$$

e_i：基底 $(\cdots\cdots)$　x^i：成分 $\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$g_{ij} := \langle e_i | e_j \rangle$ を計量(metric)と呼ぶ　対称 $(g_{ij} = g_{ji})$

・双対空間 $V^\dagger$ を $V^\dagger := \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$ として構成

V上の一次形式(線形写像 $V\to\mathbb{R}$)

$V^\dagger$の基底 f^i を $f^i(e_k)=\delta^i{}_k$ で定めたい

$$f^i(e_k) := \langle (g^{-1})^{ij} e_j \,|\, e_k\rangle = (g^{-1})^{ij} \overbrace{\langle e_j|e_k\rangle}^{g_{jk}} = \delta^i{}_k \text{ でOK}$$

Fact $V^\dagger = \langle \underbrace{f^1,\cdots,f^n}_{\text{双対基底}}\rangle_{\mathbb{R}}$, $(V^\dagger)^\dagger \simeq V$

$$\underset{V^\dagger\text{の内積}}{\langle f^i|f^j\rangle} := \langle (g^{-1})^{ik}e_k \,|\, (g^{-1})^{jl} e_l\rangle = (g^{-1})^{ik}\overbrace{(g^{-1})^{jl} g_{kl}}^{\delta^j{}_k} = (g^{-1})^{ij}$$

※以後 $g^{ij} := (g^{-1})^{ij}$ と略記 $(g^{ik}g_{kj}=\delta^i{}_j)$

・Vの基底変換を考える

$$e_i' = e_j (R^{-1})^j{}_i \quad (= ({}^tR^{-1})_i{}^j e_j)$$

$$x = e_i' x'^i = e_j (R^{-1})^j{}_i x'^i = e_j x^j \quad \therefore x'^i = R^i{}_j x^j$$

$V^\dagger$では $f'^i = g'^{ij} e_j' = R^i{}_k \underbrace{R^j{}_l g^{kl} e_m (R^{-1})^m{}_j}_{\delta_l{}^m} = R^i{}_k \overbrace{g^{kl} e_l}^{f^k}$

宿題1 この式を用いてこの等式を示せ (和の添字が重複しないよう注意する)

$g'_{ij} = \langle e_i'|e_j'\rangle = g_{kl}(R^{-1})^k{}_i (R^{-1})^l{}_j$ (両辺の(浮いた)添字が等しくなるよう・)

$x^\dagger = x_i f^i$ と表したとき $x_i' = x_j (R^{-1})^j{}_i = ({}^tR^{-1})_i{}^j x_j$

・内積を不変に保つ変換を考える (i.e. $g_{ij}' = g_{ij}$)

$$\langle x|y\rangle = \langle e_i x^i \,|\, e_j y^j\rangle = x^i g_{ij} y^j \equiv x^k g_{kl} y^l \qquad {}^tR\,g\,R = g$$

‖基底変換

$$\langle e_i' x'^i \,|\, e_j' y'^j\rangle = x'^i g'_{ij} y'^j = R^i{}_k x^k g_{ij} R^j{}_l y^l = x^k \underbrace{({}^tR)_k{}^i g_{ij} R^j{}_l}_{=g_{kl}} y^l$$

e_i : 正規直交基底 ⇒ $g_{ij} = \delta_{ij}$ (ユークリッド計量)

⇒ ${}^tRR = 1$ (R:直交行列) 注 ユークリッドでは ${}^tR = R^{-1}$ より"共変=反変"

・ここから $V=(\mathbb{R}^{1,3}, \text{"}\langle\,|\,\rangle\text{"})$ に戻る　$(x^0 \equiv ct)$

$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ ：ローレンツ不変（命題6.19）

$$= {}^t x \eta x \overset{(*)}{\longmapsto} {}^t x \underbrace{{}^t\Lambda \eta \Lambda}_{\eta} x \qquad \eta := \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{array}\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$ 正定値性なし

← これをみたす Λ 全体
＝広義ローレンツ群

<u>定義6.24</u> 座標変換が広義ローレンツ群に従い、計量 $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ をもつ4次元空間をミンコフスキー空間という　↑ミンコフスキー計量

<u>注6.25</u> $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-x_0, x_1, x_2, x_3)$
添字の上げ下げ　時間成分の上げ下げで符号が出る

<u>定義6.26</u> (tensor)

座標変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ で以下のように変換する量 $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ を p 階反変 q 階共変 ((p,q) 型) tensor という。

$\in \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{p} \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{q}$ tensor積

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p} ({}^t\Lambda^{-1})_{\nu_1}{}^{\sigma_1} \cdots ({}^t\Lambda^{-1})_{\nu_q}{}^{\sigma_q} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q}$$

特に $p=q=0$ のとき T は scalar といい、$T' = T$

〈tensorの演算〉（詳しくは[風間]5章）

(i) 添字の上げ下げ（共変⇔反変）　<u>例</u>　$\eta_{\mu\nu} A^\nu{}_\rho = A_{\mu\rho}$　$(1,1) \to (0,2)$

(ii) 添字の縮約　<u>例</u>　$A^{\mu\nu}{}_\nu = B^\mu,\ A^\mu B_\mu = C$　←「V^*, V 間でTrがとられている」
$V^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(V, V)$
cf. [横沼]

(iii) tensorの微分　<u>例</u>　$\partial_\mu A(x) = B_\mu(x)$
$(\partial^\mu := \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$ ：反変$)$

例 6.27 (Lorentz scalar)

(i) $s^2 = x_\mu x^\mu = -(ct)^2 + \vec{x}^2$

物体とともに動く時計の示す時間

$(cd\tau)^2 = -dx_\mu dx^\mu = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$

(ii) 無限小の固有時間間隔 $d\tau := \frac{1}{c}\sqrt{dx_\mu dx^\mu} = dt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma}dt$

(iii) $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ $\quad (|\det\Lambda| = 1)$

$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$

ダランベルシアン

(iv) $\Box := \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_0^2 + \underbrace{\partial_{\vec{x}}^2}_{\text{ラプラシアン}}$ (cf. P35 (W))

例 6.28 (Lorentz vector)

時間成分　空間成分

$\beta := \frac{v}{c}$

(i) 4元速度 $u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} \left(= \gamma(c, \vec{v})\right)$ …①　$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$u_\mu u^\mu = -\gamma^2(c^2 - v^2) = -c^2$ (一定) …②

(ii) 4元運動量 $p^\mu := mu^\mu \overset{①}{=} (\underbrace{m\gamma c}_{p^0}, \underbrace{m\gamma\vec{v}}_{\vec{p}}) =: \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ …③

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{|\beta|<1}{\overset{\beta\simeq 0}{=}} \underbrace{mc^2}_{\text{静止エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{非相対論的運動エネルギー}} + \mathcal{O}(\beta^4)$$ ← 宿題2 これを示せ

②×m^2 & ③: $p_\mu p^\mu \underset{③}{=} -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 \underset{②\times m^2}{=} -m^2c^2$ …④

$\therefore\ E^2 = (c\vec{p})^2 + (mc^2)^2$ …⑤　(← $m=0$ のときも実は正しく $E = c|\vec{p}|$)

定理 6.29 (tensor) = 0 の式はローレンツ不変

- Maxwell eq.: レポート8 & form は大域的 ⇒ $F_{\mu\nu}, A_\mu, j_\mu$: tensor
- 相対論的運動方程式 (ミンコフスキー eq.)　0成分: $\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$ (仕事率)

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \underbrace{K^\mu}_{4元力} := \left(\frac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{f}, \gamma\vec{f}\right) \xrightarrow{\beta\simeq 0\text{で}} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \simeq \vec{f}$$: Newtonの運動方程式

cf. [山本・中村] 上巻 P161, [米谷]