§2 量子力学(Quantum Mechanics = QM)の体系

'21 10/11

2.1 基本原理

〈準備と記号〉

"関数列の収束先 ∈ $\mathcal{H}$"

$\mathcal{H}$: $\mathbb{C}$ 上完備な「内積」空間 ∋ $|\psi\rangle$ ket vector "(たて)ベクトル"

↕ エルミート共役

← dagger (数学では「*」)

$\mathcal{H}^\dagger$: $\mathcal{H}$ の双対空間 ∋ $\langle\psi|$ bra vector "(よこ)ベクトル"

(& c.c.) ‖ complex conjugate

内積 : $\langle\psi|\psi'\rangle \in \mathbb{C}$

bracket

定義 2.1 $\hat{F}$ を $\mathcal{H}$ 上の線形 operator (op. と略す) とする

$$\hat{F}|\varphi_\lambda\rangle = f_\lambda|\varphi_\lambda\rangle \qquad (\lambda \in \Lambda) \qquad \cdots (*)$$

をみたすとき, f_λ を $\hat{F}$ の固有値, $|\varphi_\lambda\rangle$ を $\hat{F}$ の固有関数という.

$|\hat{A}\psi\rangle := \hat{A}|\psi\rangle$

$\langle\hat{B}\psi| := |\hat{B}\psi\rangle^\dagger$

定義 2.2 $^\forall|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle\hat{B}\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\hat{A}\psi_2\rangle$

が成り立つとき, $\hat{B}$ を $\hat{A}^\dagger$ と書き $\hat{A}$ のエルミート共役という.

(hermitian conjugate = h.c.)

定義 2.3 $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ のとき $\hat{A}$ をエルミート op. という

‖ (自己共役)

命題 2.4 エルミート op. $\hat{F}$ の

(i) 固有値 f_λ は実数

(ii) 異なる固有値に属する固有関数は直交する $\xrightarrow{\text{正規化}}$ $\langle\varphi_\lambda|\varphi_{\lambda'}\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}$

定義 2.5 正規直交系 $\{|\varphi_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ が完全系

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \sum_\lambda |\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda| = \hat{1}_{\mathcal{H}}$$

$\left(\text{このとき } ^\forall|\psi\rangle \in \mathcal{H},\ |\psi\rangle = \hat{1}_{\mathcal{H}}|\psi\rangle = \sum_\lambda |\varphi_\lambda\rangle \underbrace{\langle\varphi_\lambda|\psi\rangle}_{\text{展開係数} \in \mathbb{C}} \right)$

"基底"ということ

※ λ の重複度 ≧ 2 の場合 → 注 2.12 参照

定義2.6 $\hat{F}$がオブザーバブル

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \cdot \forall 固有値 f_\lambda \in \mathbb{R} \\ \cdot 固有関数系 \{|\varphi_\lambda\rangle\} が完全系 \end{cases}$

〈本題〉

$\mathcal{H}$上のオブザーバブル $\hat{H}$(ハミルトニアン)が定めるシステムを考える

法則2.7 (量子力学の基本法則)

(I) システムの状態は$\mathcal{H}$の元$|\psi\rangle$で表される。このとき特に$\mathcal{H}$を状態空間,

$|\psi\rangle$を状態ベクトルと呼ぶ。$|\psi\rangle$と$C|\psi\rangle$は同じ状態とみなす。

C: const ($\neq 0$)

(II) 物理量は$\mathcal{H}$上のオブザーバブルで表される

(III) システムの時間発展はシュレーディンガー(Schrödinger)方程式で記述される:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$i = \sqrt{-1}$

$\hbar$: プランク定数

(IV) 物理量$\hat{F}$の期待値を以下のように定義し、

$$\langle \hat{F} \rangle := \frac{\langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

状態$|\psi\rangle$において、物理量$\hat{F}$を観測したときの期待値と解釈する。

注2.8 (IV)について　(2.4の設定の下)　宿題1 これで示せ

$$|\psi\rangle = \sum_\lambda |\varphi_\lambda\rangle \underbrace{\langle \varphi_\lambda | \psi \rangle}_{\substack{\| \\ C_\lambda}}$$ と表したとき $$\langle \hat{F} \rangle = \frac{\sum f_\lambda |C_\lambda|^2}{\sum_\lambda |C_\lambda|^2} \overset{\langle\psi|\psi\rangle=1 なら}{=} \sum_\lambda f_\lambda |C_\lambda|^2$$

注 $\langle \psi | = \sum_\lambda \overline{C_\lambda} \langle \varphi_\lambda |$

1回の観測で得られる測定値はf_λ ($\in \mathbb{R}$)のどれか。そのときシステムの状態は

$|\psi\rangle$から$|\varphi_\lambda\rangle$に(確率$|C_\lambda|^2$で)(突如)遷移する。$\rightsquigarrow$ 観測問題

確率$|C_\lambda|^2$: $\langle \psi | \psi \rangle = 1$のとき

注2.9 $\langle\psi|\psi\rangle=1$ のとき，(I) の定数の不定性は $|\psi\rangle \sim e^{i\theta}|\psi\rangle$ となる

$e^{i\theta}$：U(1) 因子の不定性 $(\theta\in\mathbb{R})$

〈システムの時間発展の記述〉 $\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}=0\right.$ とする$\left.\right)$

- Schrödinger picture (S)：$|\psi(t)\rangle$ が時間発展（$\hat{F}$ は固定）⇔ Sch. eq.
- Heisenberg 〃 (H)：$\hat{F}(t)$ が 〃 （$|\psi\rangle$ は固定）⇔ Heisenberg eq.

(S) → (H)

Sch. eq. $\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=\hat{H}|\psi(t)\rangle$ より

$$|\psi(t)\rangle=\underbrace{e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}}_{\text{ユニタリ}\ (\hat{H}:\text{エルミート})}\underbrace{|\psi(0)\rangle}_{=:|\psi\rangle} \Rightarrow \underbrace{\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle=\langle\psi|\psi\rangle}_{\text{一定}}$$

オブザーバブル $\hat{F}$ の期待値

$$\langle\hat{F}(t)\rangle=\langle\psi(t)|\hat{F}|\psi(t)\rangle$$

$$=\langle\psi|\underbrace{e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\hat{F}e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}}_{\hat{F}(t)}|\psi\rangle$$

時間発展を op. におしつける

$$\frac{d\hat{F}(t)}{dt}=\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}(\hat{H}\hat{F}-\hat{F}\hat{H})e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$$

← 宿題2 $\hat{F}(t)$ の def から Heis. eq. を導け

$[\hat{A},\hat{B}]:=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ 交換子積

$$=\frac{1}{i\hbar}[\hat{F}(t),\hat{H}]\quad:\text{Heisenberg eq.}$$

命題2.10 $\quad[\hat{F},\hat{H}]=0 \Rightarrow \hat{F}$ は保存量 (i.e. $\frac{d\hat{F}}{dt}=0$)

注2.11 これは古典力学における Poisson 括弧 $\{\ ,\ \}_{P.B.}$ を op. に対する交換子 $\frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$ におきかえたもの

☺（注2.11）

古典力学（解析力学）

〈簡単のため1次元で議論〉　← x：物体の位置，p：物体の運動量

$H(x,p) := \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{V(x)}_{\text{ポテンシャルエネルギー}}$（ハミルトニアン）として　①

（ハミルトンの）正準方程式：$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}$，$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$

$\frac{\partial H}{\partial q} \overset{①}{=} \frac{1}{m}p$（$p$と$v$の関係）　$-\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial x}$〈保存力〉（運動方程式）

Poisson括弧：

$$\{f,g\}_{P.B.} := \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}$$

このとき．$F=F(x,p)$に対して

$$\frac{dF}{dt} = \{F,H\}_{P.B.} \overset{☺}{=} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x} \overset{\text{代入}}{=} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dt} = \frac{Fの全微分}{dt}$$

が成り立つ．∎

注2.12

命題2.4(ii)はλの重複度が2以上でも成り立つ．（これがエルミート性の帰結）

$|\varphi_\lambda\rangle \rightsquigarrow |\varphi_{\lambda,k}\rangle$と表すと．2.4(ii)，2.5の式は　← k：1からλの重複度まで走るラベル

以下のようになる

（正規直交性）　$\langle\varphi_{\lambda,k}|\varphi_{\lambda',k'}\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'}$

（完全性）　$\sum_{\lambda,k}|\varphi_{\lambda,k}\rangle\langle\varphi_{\lambda,k}| = 1_{\mathcal{H}}$

2.2 正準交換関係と不確定性原理

定義2.13 (x^i, p_i) を古典力学での粒子の正準変数(位置, 運動量)とする.
← $i=1,2,3$ (x,y,z成分)

これらを、以下をみたすように $\mathcal{H}$ 上の ops. $\hat{x}, \hat{p}$ におきかえる操作を正準量子化という.

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta^i_j, \quad [\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

正準交換関係(Canonical Commutation Relation = CCR)と呼ぶ

(基本ポアソン括弧 $\{x^i, p_j\}_{P.B.} = 1$ 等において、$\{\ ,\ \}_{P.B} \to \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$ とおきかえたもの)

以後 簡単のため空間1次元で考える

例2.14 (CCRの例)　　「A表示」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\hat{A}$ を対角化する表示

(i) $\hat{x} = x, \ \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ (x表示)
(Schrödinger量子化)

$\exists\{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{R}}$ 完全系 s.t. $\begin{cases} \hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \\ \hat{p}|x\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}|x\rangle \end{cases}$

(ii) $\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, \ \hat{p} = p$ (p表示)

$\exists\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$ s.t. $\begin{cases} \hat{x}|p\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}|p\rangle \\ \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \end{cases}$

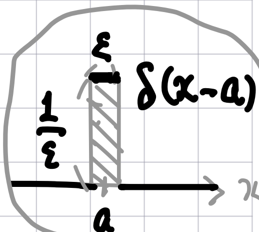
定義2.15 $\Lambda = \mathbb{R}$ のとき　　$|\varphi_\lambda\rangle$ を $|\lambda\rangle$ と書いている

- 正規直交系 $\Leftrightarrow$ $\langle\lambda|\lambda'\rangle = \delta(\lambda - \lambda')$
- 〃 が完全系 $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, |\lambda\rangle\langle\lambda| = 1_{\mathcal{H}}$

cf. Gelfandの3つ組
$(\Omega, \mathcal{H}, \Omega')$
Ω: $\mathcal{H}$より小さい　Ω': $|x\rangle$

定義2.16 (Diracのデルタ関数)

以下をみたす汎関数 $\delta: f \mapsto f(a)$ を delta-fcn. と呼ぶ

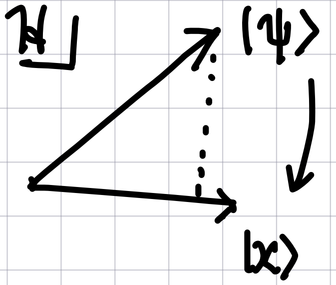


$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a) \quad (a\in\mathbb{R})$$
test fcn.

ある物理屋の妄想

命題2.17 $$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk$$

注2.18 $\{|x\rangle\}$ について



位置を測定

遷移(注2.8)

(遷移確率) $|\psi\rangle = \text{“}\sum_x\text{”} C_x |x\rangle$

$$\text{(遷移確率)} = |C_x|^2 = |\underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{=\psi(x)}|^2 = |\psi(x)|^2$$

Bornの確率解釈

$$\langle\psi|\psi\rangle = \underbrace{\int dx\, \overline{\psi(x)}\,\psi(x)}_{\text{標準的内積}} = \int dx\, \langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$\langle\psi| = \text{“}\sum_x\text{”}\langle x|\overline{C_x}$

$\forall|\psi\rangle \quad \int dx\, |x\rangle\langle x| = 1$

$$\forall\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \underset{\uparrow\text{完全系}}{=} \int dx' \underbrace{\langle x|x'\rangle}_{=\delta(x-x')}\underbrace{\langle x'|\psi\rangle}_{\psi(x')}$$

となるべし

注2.19 $|x\rangle \to |p\rangle$ の基底変換

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \underset{\uparrow p\text{の完全系}}{=} \int dp\, \underbrace{\langle x|p\rangle}_{?}\underbrace{\langle p|\psi\rangle}_{\psi(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}\psi(p)$$

Fourier変換!

一方

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\langle x|p\rangle$$

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = p\langle x|p\rangle \longrightarrow p(x) = A e^{\frac{ipx}{\hbar}}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

宿題1 $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ を示せ

U(1)因子の不定性 $e^{i\theta}$ (注2.9) は $e^{i\theta} = 1$ とした

(答) $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p') \longleftrightarrow 2\pi\hbar|A|^2\delta(p'-p)$ 　$\delta(x)=\delta(-x)$ より

$\uparrow$ xの完全系

$$\langle p|p'\rangle = \int dx\, \underbrace{\langle p|x\rangle}_{\bar{A}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}\underbrace{\langle x|p'\rangle}_{Ae^{\frac{ip'x}{\hbar}}} = |A|^2\int dx\, e^{\frac{ix}{\hbar}(p'-p)} \underset{x\mapsto x\hbar}{=} |A|^2\hbar\int dx\, e^{ix(p'-p)} \overset{2.17}{=} 2\pi\hbar|A|^2\delta(p'-p)$$

命題2.20 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$: エルミートops. が $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ をみたすとき

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{\langle\hat{C}\rangle^2}{4}$$ (Robertsonの不等式) $\left(\Delta\hat{F} := \hat{F} - \langle\hat{F}\rangle\right)$

∵ $I(\alpha) := \langle{}^\forall\psi|\underbrace{(\alpha\Delta\hat{A} - i\Delta\hat{B})(\alpha\Delta\hat{A} + i\Delta\hat{B})}_{(\Delta\hat{A})^2\alpha^2 + i[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\alpha + (\Delta\hat{B})^2}|\psi\rangle = \left|(\alpha\Delta\hat{A} + i\Delta\hat{B})|\psi\rangle\right|^2 \geq 0$ 実数値

$(\alpha \in \mathbb{R})$

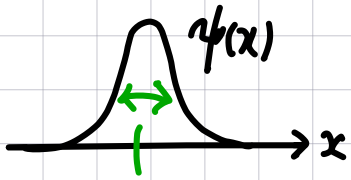
$= \langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\alpha^2 - \langle\hat{C}\rangle\alpha + \langle(\Delta\hat{B})^2\rangle$ 判別式 ≤ 0 ⇒ 与式 □

(等号成立 ⇒ $\alpha = \dfrac{\langle\hat{C}\rangle}{2\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle}$)

系2.21 $\hat{A} = \hat{x}, \hat{B} = \hat{p}, \hat{C} = \hbar$ で

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$ (Heisenbergの不確定性原理) $\left(\Delta F := \sqrt{\langle(\Delta\hat{F})^2\rangle}\right)$

注2.22 等号成立 ⇔ Gaussian (波束)



$\left(\langle\hat{x}\rangle = 0, \langle\hat{p}\rangle = 0 \text{ なら } \psi(x) = A e^{-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2}}\right)$

$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ から A が決まる

半値幅 $\sim \Delta x$

大↑小

小↓大

半値幅 $\sim \Delta p$

∵ このときを考える.

$\alpha = \dfrac{\hbar}{2(\Delta x)^2}$ & $(\alpha\Delta\hat{x} + i\Delta\hat{p})|\psi\rangle = 0$ … ①

$\langle x|$ → ⇓

$\langle x|(\alpha\underbrace{\Delta\hat{x}}_{\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle} + i\underbrace{\Delta\hat{p}}_{\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle})|\psi\rangle \Rightarrow \left(\alpha x + \hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = 0$ □

$\langle\hat{x}\rangle = 0$, $\langle\hat{p}\rangle = 0$

x 　 $\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$

(答) $\psi(p) = A' e^{-\frac{p^2}{4(\Delta p)^2}}$

∵ $\langle p|$① & $\Delta x\Delta p = \dfrac{\hbar}{2}$ より □

宿題2 $\langle\hat{x}\rangle = 0, \langle\hat{p}\rangle = 0$ のとき $\psi(p)$ を求めよ

'21 10/25

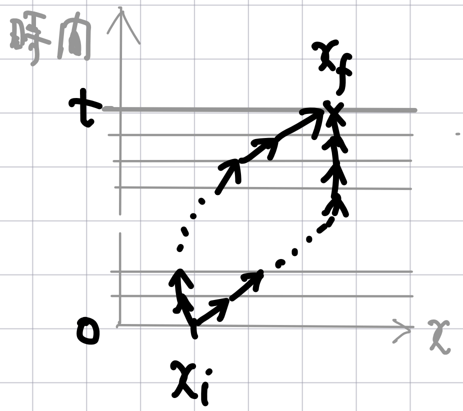
例2.23（経路積分）

・ $|x_i\rangle$ $\xrightarrow{\text{時間発展}}$ $|x_f\rangle$ となる確率 Z を求めたい。

$t=0$ 　　　　　時刻 t

$$Z = \langle x_f| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |x_i\rangle$$

‖ $\Delta t = \frac{t}{N}$ （N等分）とする



$$\langle x_f| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} \cdot \cdots \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} |x_i\rangle$$

x_{N-1} 　$x_{N-2}\cdots x_1$ の完全系

‖

$$\int dx_1 \cdots dx_{N-1} \langle x_f| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} |x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} |x_{N-2}\rangle \cdots \langle x_1| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} |x_i\rangle$$

p_{N-1} 　p_{N-2} 　$\cdots$ 　p_0 の完全系

‖

$$\int dx_1 \cdots dx_{N-1} dp_0 \cdots dp_{N-1} \underbrace{\langle x_f|p_{N-1}\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}x_f}} \underbrace{\langle p_{N-1}| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} |x_{N-1}\rangle}_{\langle p_{N-1}|x_{N-1}\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}H(x_{N-1},p_{N-1})\Delta t}} \underbrace{\langle x_{N-1}|p_{N-2}\rangle} \underbrace{\langle p_{N-2}| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t}} \cdots$$

$$\cdots |x_1\rangle \underbrace{\langle x_1|p_0\rangle} \underbrace{\langle p_0| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} |x_i\rangle}$$

$$\langle p_{N-1}|x_{N-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}p_{N-1}x_{N-1}}$$

$$\overbrace{H(x,p)}^{\langle p|x\rangle} = \langle p|\hat{H}(\hat{x},\hat{p})|x\rangle \quad (\hat{x}\to x,\ \hat{p}\to p)$$

宿題1
$N=3$として
この式まで
導け

‖

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\int dx_1 \cdots dx_{N-1} dp_0 \cdots dp_{N-1}\, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\left\{p_j(x_{j+1}-x_j) - H(x_j,p_j)\Delta t\right\}} \qquad \begin{pmatrix} x_0 := x_i \\ x_N := x_f \end{pmatrix}$$

$\downarrow N\to\infty$

$$\int \mathcal{D}x\mathcal{D}p\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \overbrace{(p\dot{x} - H(x,p))}^{L(x,\dot{x})\text{：ラグランジアン！}} dt} = \int \mathcal{D}x\mathcal{D}p\, e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

$S := \int_0^t L\,dt$ （作用積分）

dot = 時間微分

$\int \mathcal{D}x\mathcal{D}p$ =「経路積分」= すべての経路についての和

§3 シュレーディンガー方程式の解法(空間1次元)

3.1 一般的事項

Sch. eq. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \underbrace{\hat{H}(\hat{x},\hat{p})}_{= \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x})}|\psi(t)\rangle$

$\langle q|\hat{q} = \langle q|q$

$\langle q|\hat{p} = \langle q|\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$

$\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x})$: エルミートとする（$V(\hat{x})$：ポテンシャル）

左から $\langle x|$ をかける

$\psi(x,t) := \langle x|\psi(t)\rangle$

x表示でのSch. eq. $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \underbrace{V(x)}_{\mathbb{R}\text{値}}\right)\psi(x,t) \quad \cdots (*)$$

変数分離を考える:

$$\psi(x,t) = f(t)\,\varphi(x)$$

$$(*) \Rightarrow \underbrace{\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}}_{t\text{のみ}} = \underbrace{\frac{H\varphi(x)}{\varphi(x)}}_{x\text{のみ}} = E\ (\text{定数})$$

※物理で登場する関数は、断りがなければすべて C^∞ 級

$$\therefore \begin{cases} f(t) = a\,e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\varphi(x) = \underset{\in \mathbb{R}}{E}\,\varphi(x) \end{cases}$$

← この固有値問題を解きたい

このとき $|\psi(x,t)|^2 = |a|^2|\varphi(x)|^2$: 時間変化しない(定常状態)

定義3.1 $\varphi(x)$ が2乗可積分のとき、システムは束縛状態であるという。

〃 そうではない 〃 散乱状態 〃

k: 波数
ω: 角振動数

定義3.2 $\psi(x,t) = Ae^{i(kx\mp\omega t)}$ を平面波解という

例3.3 $V = V_0$ (定数) の場合

宿題2 $f(x-vt)$ の形の関数は、x の正の向きに速さ v で進む「波」を表すことを説明せよ

x微分

$$\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\varphi = 0$$

(i) $E > V_0$ のとき $\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ $\quad k := \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$ … ①

(ii) $E < V_0$ のとき $\varphi(x) = Ce^{\rho x} + De^{-\rho x}$ $\quad \rho := \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$ … ②

※ (i) は $f(t)$ と合わせれば平面波

x の正方向　　負方向に進む波

∵ $E = \hbar\omega$ として $\psi(x,t) = A'e^{i(kx-\omega t)} + B'e^{-i(kx+\omega t)}$

また、$p := \hbar k$ として、$V_0 = 0$ とすると、$p \overset{①}{=} \sqrt{2mE} \Leftrightarrow E = \frac{p^2}{2m}$

自由粒子の運動エネルギー

命題3.4 $\varphi(x)$: 有界とする。

ポテンシャル $V(x)$ が $x = a$ で不連続かつその近傍で有界のとき

$\varphi(x)$ および $\varphi'(x)$ は $x = a$ で連続

∵ $$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{d^2\varphi}{dt^2}\,dx = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}(E-V(x))\varphi(x)\,dx$$

$$\therefore \left|\frac{d\varphi}{dt}(x=a+\varepsilon) - \frac{d\varphi}{dt}(x=a-\varepsilon)\right| \leq \frac{2m}{\hbar^2}\sup_{x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}\left(|E-V_0||\varphi(x)|\right)\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}dx$$

$$= 2\varepsilon \times (\text{有限}) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

同様に $$|\varphi(a+\varepsilon) - \varphi(a-\varepsilon)| \leq 2\varepsilon \sup|\varphi'(x)| \xrightarrow{\prime\prime} 0$$ ∎

命題3.5 1次元システムの束縛状態$\varphi(x)$の零点が高々有限個であり、かつ $|\varphi(x)| \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$ とする。このとき

(i) エネルギー固有値Eに関して縮退がない

(ii) $V(x) = V(-x)$ 偶 $\Rightarrow$ $\varphi(-x) = \pm\varphi(x)$ 偶か奇

(iii) $\varphi(x)$は実関数にとれる.

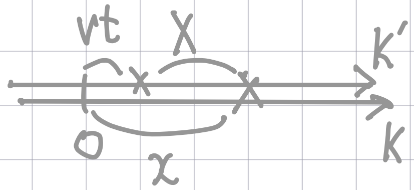
縮退がある $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 同一固有値をもつ固有関数が2つ以上ある.

☺ レポートにします

宿題2 解答例

$X := x - vt$ とおくと. $f(x-vt) = f(X)$ …①

ここで座標変換 $(x, t) \mapsto (X, t)$ を考える.
K系　　K'系と呼ぶ



K'系はK系に対して速さvで正方向に運動する座標系である.

一方,①よりK'系で見た関数形(波形)は時間変化しない.

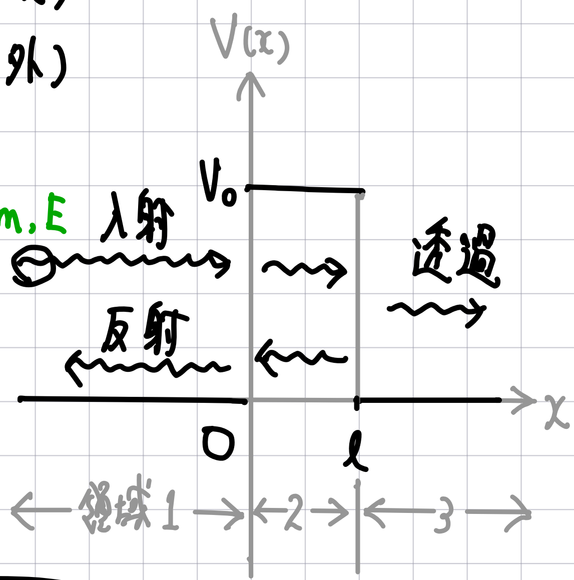
以上により,K系から見た波形はxの正の向きに速さvで進む波を表す.

3.2 ポテンシャル障壁による散乱問題

'21 11/1

例3.6 $V(x) = \begin{cases} V_0\ (>0) & (0 \leqq x \leqq \ell) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

このポテンシャル障壁に $x = -\infty$ から自由粒子 (m, E) が入射



質量 エネルギー (given)

(i) $E > V_0$ のとき

例3.3 より

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ \varphi_2(x) = Fe^{i\alpha x} + Ge^{-i\alpha x} \\ \varphi_3(x) = Ce^{ikx} \end{cases} \qquad k := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \alpha := \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

宿題1 $\frac{C}{A}$ の式を計算して導け

命題3.4 の b.c. (=boundary condition) より

$x = 0$: $A + B = F + G$, $ik(A-B) = i\alpha(F-G)$

$x = \ell$: $Ce^{ik\ell} = Fe^{i\alpha\ell} + Ge^{-i\alpha\ell}$, $ikCe^{ik\ell} = i\alpha(Fe^{i\alpha\ell} - Ge^{-i\alpha\ell})$

方程式4つ 未知変数5つ

$$\therefore \frac{B}{A} = \frac{(k^2-\alpha^2)(1-e^{2i\alpha\ell})}{(k+\alpha)^2 - (k-\alpha)^2 e^{2i\alpha\ell}}, \quad \frac{C}{A} = \frac{4k\alpha\, e^{i(\alpha-k)\ell}}{(k+\alpha)^2 - (k-\alpha)^2 e^{2i\alpha\ell}}$$

$$\therefore (*) \begin{cases} \text{反射率} := \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(1 + \frac{4(k\alpha)^2}{(k^2-\alpha^2)\sin^2\alpha\ell}\right)^{-1} \\ \text{透過率} := \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \left(1 + \frac{(k^2-\alpha^2)\sin^2\alpha\ell}{4(k\alpha)^2}\right)^{-1} \end{cases}$$

和 = 1

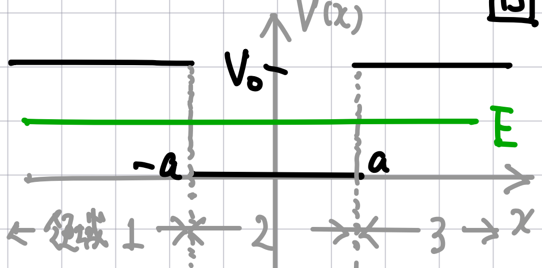
※ $\alpha\ell = n\pi$ で $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ $\left|\frac{B}{A}\right|^2 = 0$, $\left|\frac{C}{A}\right|^2 = 1$ (完全透過)

(ii) $E < V_0$ のとき

$\beta := \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ とおいて、(*) の $\alpha \mapsto i\beta$ とおきかえればよい

$\left(\left|\frac{C}{A}\right|^2 \neq 0 :\ \text{トンネル効果!}\right)$

3.3 井戸型ポテンシャルによる束縛状態



例 3.7 $V(x) = \begin{cases} 0 & : |x| \leq a \\ V_0 (>0) & : |x| > a \end{cases}$

に エネルギー E $(0<E<V_0)$ の粒子が束縛されている。(固有値問題を解く)

$V(-x) = V(x)$ より、波動関数 $\varphi(x)$：偶 or 奇 (3.5(ii))

(i) $\varphi(x)$ が偶関数のとき

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = Be^{\beta x} + \cancel{B'e^{-\beta x}} \\ \varphi_2(x) = A\cos\alpha x \\ \varphi_3(x) = Be^{-\beta x} + \cancel{B'e^{\beta x}} \end{cases}$$

不適 (∵ 束縛 ⇔ 2乗可積分 ⇒ $|\varphi(x)| \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$)

$\alpha := \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\beta := \dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

$x = \pm a$ での b.c.：

$$Be^{-\beta a} = A\cos\alpha a, \quad B\beta e^{-\beta a} = A\alpha\sin\alpha a$$

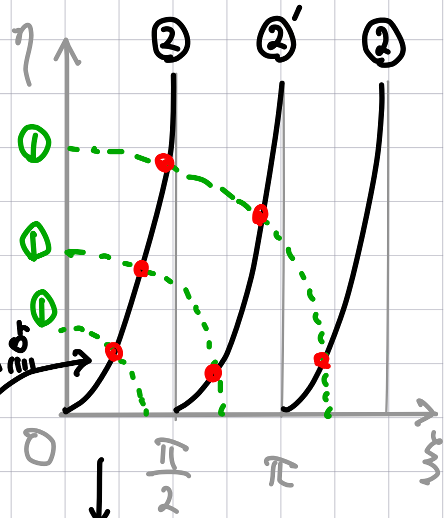
A, B & E! 式3つ, 未知変数3つ!

規格化条件：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$

$\xi := \alpha a\ (>0)$, $\eta := \beta a\ (>0)$ とすると

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \cdots ①, \quad \eta = \xi\tan\xi \cdots ②$$

この点



交点の値から、α, β (つまり E) が定まる。(離散的)

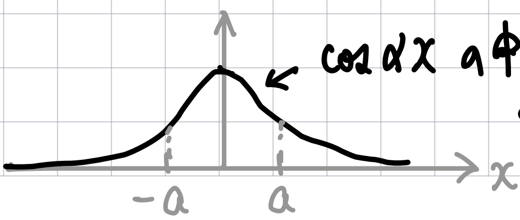
(交点なし ⇔ 解なし)

(ii) $\varphi(x)$ が奇関数のとき (詳しくはレポート)

同様に ① & $\eta = -\xi\cot\xi \cdots ②'$

エネルギー固有値最小 ⇔ α が最小 (交点の ξ の値が最小)

このときの $\varphi(x)$ の概形：



$\cos\alpha x$ の中で α 最小 かつ $x = \pm a$ でなめらかに指数関数に接続

3.4 調和振動子

Diracの記法で代数的に解く(固有値問題を解きエネルギー準位を求める)

固有値

$$\hat{H}(\hat{x},\hat{p}) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

まず次のops.をdef:

エルミート共役

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

$\hat{H}$の固有値問題 $\Leftrightarrow$ $\hat{N} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有値問題

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \Rightarrow [\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$$

また、$[\hat{N},\hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ …①

$[\hat{N},\hat{a}] = -\hat{a}$ …②

宿題2 これを示せ

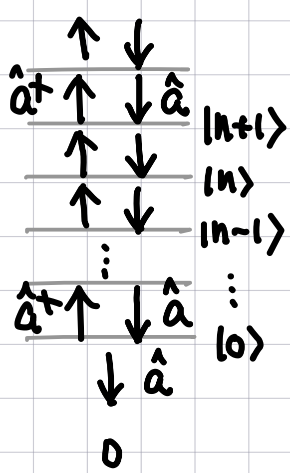
($[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$ を用いてよい)

$\hat{N}$の固有状態を$|n\rangle$, 固有値をλ_nとする: $\hat{N}|n\rangle = \lambda_n|n\rangle$

このとき、

$$\begin{cases} \hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle \overset{①}{=} (\hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger)|n\rangle = (\lambda_n + 1)\hat{a}^\dagger|n\rangle \\ \hat{N}\hat{a}|n\rangle \overset{②}{=} (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|n\rangle = (\lambda_n - 1)\hat{a}|n\rangle \end{cases}$$

よって $\hat{a}^\dagger|n\rangle$, $\hat{a}|n\rangle$ も $\hat{N}$の固有状態.



一方、$\langle n|\hat{N}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = |\hat{a}|n\rangle|^2 \geq 0$

$$\langle n|\hat{N}|n\rangle = \lambda_n \underbrace{\langle n|n\rangle}_{} = 1 \ (\text{規格化可能とする})$$

よってあるnで $\hat{a}|n\rangle = 0$ とならなければならない

これを$|0\rangle$と書くと、

$\lambda_0 = \langle 0|\hat{N}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0$ より

$\lambda_n \in \{0,1,2,\cdots\}$ が言える. $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

- $\hat{N}$: number op. という
- $\hat{a}^\dagger$: creation op.
- $\hat{a}$: annihilation op.

'21 11/8

15

エネルギー固有値 $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

$E_n \geqq E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$: 零点エネルギー (量子ゆらぎの反映)

最低エネルギー $\Updownarrow$ $|0\rangle$:「基底状態 (ground state)」

次に $|n+1\rangle = c_n\, \hat{a}^\dagger |n\rangle$ の c_n, d_n

$|n-1\rangle = d_n\, \hat{a} |n\rangle$ を求める

$$1 = \langle n+1|n+1\rangle = |c_n|^2 \langle n| \underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}_{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1} |n\rangle = (n+1)|c_n|^2 \quad \therefore c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$1 = \langle n-1|n-1\rangle = |d_n|^2 \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n\,|d_n|^2 \quad \therefore d_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

← $e^{i\theta}$ の不定性は無視

$$\therefore \begin{cases} \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\ \hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \end{cases} \qquad \therefore |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

波動関数 (x表示)

$\hat{a}|0\rangle = 0$ (基底状態をまず求める)

$\langle x| \to \Downarrow$

$$\langle x|\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)|0\rangle = 0$$

x , $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$

$$\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)\underbrace{\langle x|0\rangle}_{\varphi_0(x)\ 波動関数} = 0 \to \varphi_0(x) = \underbrace{A}_{=\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

位相因子 $= 1$

$\leftarrow \langle 0|0\rangle = 1$

↑ xの完全系

Aを計算して求めよ。 宿題1

$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\right)$ を用いてよい

(第n番目の)励起状態の波動関数 $\varphi_n(x)$ も同様に求まる:

$$\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle = \langle x|\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

$$= N_n\left[\xi - \frac{d}{d\xi}\right]^n e^{-\frac{\xi^2}{2}} = N_n \underbrace{H_n(\xi)}_{エルミート多項式} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\xi := \beta x,\ \beta := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}},\ N_n := \sqrt{\frac{\beta}{\pi^{\frac{1}{2}} n!\, 2^n}} \qquad H_n(\xi) := (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}$$

§4 シュレーディンガー方程式の解法(空間3次元)

4.1 QM (3次元)

粒子の位置: $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

〃 運動量: $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \equiv (p_x, p_y, p_z)$

(CCR) $[\hat{x}_k, \hat{p}_\ell] = i\hbar\,\delta_{k\ell}$ $\quad k, \ell \in \{1, 2, 3\}$

(x表示) $\hat{x}_k |x_k\rangle = x_k |x_\ell\rangle$

$\langle x_k | x'_\ell\rangle = \delta_{k\ell}\,\delta(x_k - x'_\ell)$

$\int dx_k\, |x_k\rangle\langle x_k| = \hat{1}_{\mathcal{H}_k}$

$\hat{x}_1, \hat{p}_1 \quad \hat{x}_2, \hat{p}_2 \quad \hat{x}_3, \hat{p}_3$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$

$\in$

(Sch. eq.) $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}})\, |\psi(t)\rangle$

$\downarrow$ 左から $\langle \vec{r}|$ をかける $\left(\langle \vec{r} | \psi(t)\rangle =: \psi(\vec{r}, t)\right)$

$\langle \vec{r}| = \langle x | \otimes \langle y | \otimes \langle z |$

<u>$\vec{r}$表示</u> $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \underbrace{H\left(\vec{r}, \frac{\hbar}{i}\nabla\right)}_{= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})} \psi(\vec{r}, t)$

ナブラ $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\psi(\vec{r}, t) = f(t)\,\varphi(\vec{r})$

(変数分離)

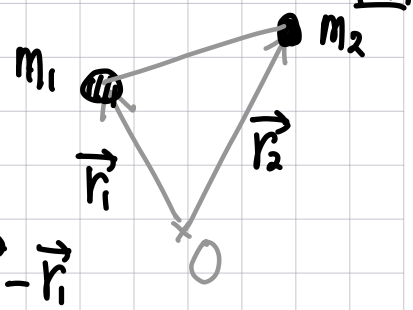
$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$: ラプラシアン

<u>定常状態</u>
$$\begin{cases} f(t) = a\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right] \varphi(\vec{r}) = E\,\varphi(\vec{r}), \quad E \in \mathbb{R} \\ |\psi(\vec{r}, t)|^2 = |a|^2\, |\varphi(\vec{r})|^2 \end{cases}$$

E: エネルギー固有値

4.2 2体問題

$\vec{p}_i := m_i \dot{\vec{r}}_i$ ← 時間ビブン



ハミルトニアン $H = \dfrac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \dfrac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + V(|\vec r_2 - \vec r_1|)$

重心座標 $\vec R := \dfrac{m_1\vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1+m_2}$, 相対座標 $\vec r := \vec r_2 - \vec r_1$

全質量 $M := m_1+m_2$, 換算質量 $\mu := \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ $\left(\Leftrightarrow \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}\right)$

$\vec P := M\dot{\vec R}$, $\vec p := \mu \dot{\vec r}$, $r := |\vec r|$ $\qquad m_1 \gg m_2 \Rightarrow \mu \fallingdotseq m_2$

$$H = \frac{1}{2M}\vec P^2 + \frac{1}{2\mu}\vec p^2 + V(r)$$ ← 宿題2 これを示せ

量子化: $[\hat x_k^{(1)}, \hat p_l^{(1)}] = [\hat x_k^{(2)}, \hat p_l^{(2)}] = i\hbar\delta_{kl}$ $\left(\Rightarrow [\underset{\text{重心}}{\hat X_k}, \hat P_l] = [\underset{\text{相対}}{\hat x_k}, \hat p_l] = i\hbar \delta_{kl}\right)$

Sch. eq. (位置表示)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec R,\vec r,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\vec R} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\vec r} + V(r)\right]\Psi(\vec R,\vec r,t)$$

$$\downarrow \quad \Psi(\vec R,\vec r,t) = e^{i\frac{\vec P'\cdot\vec R}{\hbar} - i\frac{\vec P'^2}{2M\hbar}t}\,\psi(\vec r,t)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec r,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\vec r}+V(r)\right]\psi(\vec r,t)$$ 1粒子のeq.に帰着

4.3 角運動量と極座標系

$\epsilon_{123}=\epsilon_{231}=\epsilon_{312}=-\epsilon_{132}=-\epsilon_{213}=-\epsilon_{321}=1$, 他$=0$

エディントンのイプシロン 完全反対称テンソル

定義4.1 軌道角運動量 op. (エルミート)

$\hat{\vec L} := \hat{\vec r}\times\hat{\vec p}$ $\qquad$ (i.e. $\hat L_x = \hat y\hat p_z - \hat z\hat p_y, \cdots$)

命題4.2 (i) $[\hat L_j, \hat L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat L_l$ $\qquad$ (i.e. $[\hat L_1,\hat L_2] = i\hbar\hat L_3, \cdots$)

lについて和がとられている (アインシュタインの規約)

(ii) $[\hat{\vec L}^2, \hat L_k] = 0$, $\forall k$

$a_k b_k := \sum_k a_k b_k$

命題4.3　$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\vec{r}} + V(r)$ の極座標表示：

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{L}^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

∵ レポート

ここで $\vec{L}^2$ の固有値方程式を

$$\vec{L}^2 Y(\theta,\phi) = \hbar^2\lambda Y(\theta,\phi) \quad \cdots ①$$

と表き、$\varphi(\vec{r}) = R(r)Y(\theta,\phi)$ と変数分離：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2\lambda}{2\mu r^2} + V(r)\right]u(r) = E\,u(r) \quad \cdots ② \quad \left(u(r) := rR(r)\right)$$

規格化条件：$\displaystyle\int_0^\infty \underbrace{|R(r)|^2 r^2}_{|u(r)|^2} dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} |Y(\theta,\phi)|^2 d\phi = 1$

b.c. $\begin{cases} u(r\to\infty) = 0 \\ u(0) = 0 \quad \left(V(r)\sim\frac{1}{r} \text{ などの条件下}\right) \end{cases}$ (詳しくはレポート)

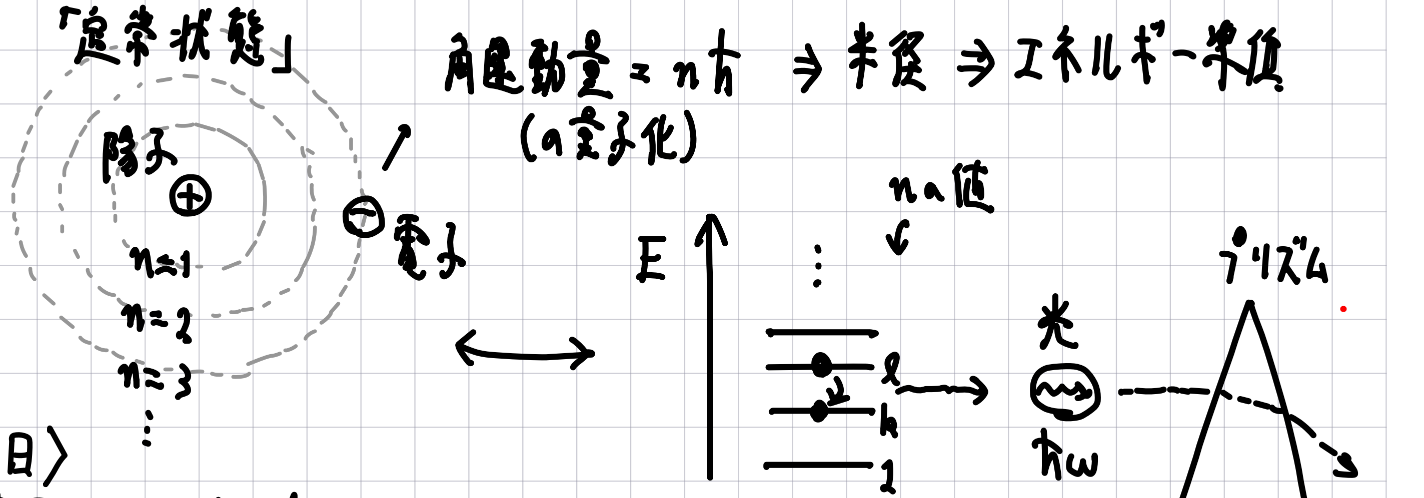
'21 11/15

4.4 水素原子の束縛状態

例4.4 水素原子のBohr模型(1913年)

「定常状態」

角運動量 $= n\hbar$ ⇒ 半径 ⇒ エネルギー準位
(の量子化)



リュードベリ定数

$$\underbrace{Rch}_{=}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{\ell^2}\right)$$

固有の波長(振動数)をもつ光

〈今日〉
水素原子のSchrödinger eq. を解く

$$H\varphi_n = E_n\varphi_n$$ これを求める

$$E_n = -C\frac{1}{n^2}$$ 一致するか? 13.6 eV

$(1\,\mathrm{eV} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J})$

$(m \simeq \mu)$

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Bohr半径

$$\varepsilon := \frac{2ma_0^2}{\hbar^2}E,\quad \rho := \frac{r}{a_0} \text{ とおく.} \qquad \left(a_0 := 4\pi\varepsilon_0\frac{\hbar^2}{me^2}\right)$$

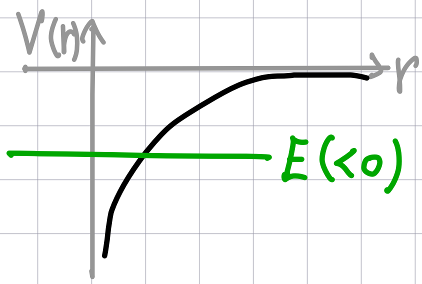
宿題1 a_0の値を単位付きで有効数字2ケタで求めよ.
m : 電子の質量
e : 〃 電荷
ε_0 : 真空の誘電率
$\hbar$: プランク定数 (2πで割ったもの)

① を解く(来週) ⇝ $\lambda = \ell(\ell+1)$ $\quad \ell\in\{0,1,2,\cdots\}$

今日は ② を解く。$R(r) = R_\ell(r)$ と書き、$u_\ell := \rho R_\ell$ とおくと.

$$\text{(Sch eq.)}\quad \underbrace{\left[-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}-\frac{2}{\rho}\right]}_{=H_\ell} u_\ell(\rho) = \varepsilon\, u_\ell(\rho)$$

$\varepsilon < 0$



以後 [砂川] P120 に沿う

"昇降 ops." を導入:

$$\begin{cases} b_{\ell+k} := \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{d\rho} + i\left(\dfrac{\ell+k}{\rho} - \dfrac{1}{\ell+k}\right) \\ b_{\ell+k}^{\dagger} = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{d\rho} - i\left(\dfrac{\ell+k}{\rho} - \dfrac{1}{\ell+k}\right) \end{cases} \quad k \in \{1, 2, \cdots\}$$

このとき、$H^{(k)} := -\dfrac{d^2}{d\rho^2} + \dfrac{(\ell+k-1)(\ell+k)}{\rho^2} - \dfrac{2}{\rho}$, $\varepsilon^{(\ell+k)} := -\dfrac{1}{(\ell+k)^2}$ として

$$\begin{cases} b_{\ell+k}^{\dagger} b_{\ell+k} = H^{(k)} - \varepsilon^{(\ell+k)} \\ b_{\ell+k} b_{\ell+k}^{\dagger} = H^{(k+1)} - \varepsilon^{(\ell+k)} \end{cases} \cdots (\star)$$

$H^{(1)} \equiv H_\ell$ (もともとのH)

また $H^{(k)} b_{\ell+k}^{\dagger} = b_{\ell+k}^{\dagger} H^{(k+1)}$ が成り立つ.

∵ $(左辺) = \left(b_{\ell+k}^{\dagger} b_{\ell+k} + \varepsilon^{(\ell+k)}\right) b_{\ell+k}^{\dagger} = b_{\ell+k}^{\dagger} b_{\ell+k} b_{\ell+k}^{\dagger} + \varepsilon^{(\ell+k)} b_{\ell+k}^{\dagger}$

$= b_{\ell+k}^{\dagger}\left(b_{\ell+k} b_{\ell+k}^{\dagger} + \varepsilon^{(\ell+k)}\right) = (右辺)$ ▨

ここで、$b_{\ell+k}\,\varphi^{(\ell+k-1)} = 0 \quad \cdots (**)$ をみたす関数を考える.

これは $H^{(k)}$ の最低固有値を与え、その固有値は $\varepsilon^{(\ell+k)}$.

∵ $H^{(k)} \varphi^{(\ell+k-1)} = \left(b_{\ell+k}^{\dagger} b_{\ell+k} + \varepsilon^{(\ell+k)}\right)\varphi^{(\ell+k-1)} = \varepsilon^{(\ell+k)}\varphi^{(\ell+k-1)}$.

また、$H^{(k)}$ の $\varphi^{(\ell+k-1)}$ 以外の固有関数を $\chi^{(\ell+k-1)}$ (規格化済) と書くと

$$\int_0^\infty \chi^{\dagger(\ell+k-1)} H^{(k)} \chi^{(\ell+k-1)}\, d\rho = \underbrace{\int_0^\infty |\underbrace{b_{\ell+k}\,\chi}_{\neq 0}|^2 d\rho}_{>0} + \varepsilon^{(\ell+k)}$$

>0 (1次元では縮退がない)

$> \varepsilon^{(\ell+k)}$ ▨

$H^{(l)} \equiv H_l$ の固有関数を拾い出す

$H^{(l)} = b_{l+1}^\dagger b_{l+1} + \varepsilon^{(l+1)}$, $b_{l+1}\varphi^{(l)} = 0$

k=1 $u_{l+1} := \varphi^{(l)}$ は $H^{(l)}$ の固有値 $\varepsilon^{(l+1)}$ の解 ∵ $H^{(l)}u_{l+1} = H^{(l)}\varphi^{(l)} = \varepsilon^{(l+1)}u_{l+1}$ ■

k=2 $u_{l+2} := b_{l+1}^\dagger\varphi^{(l+1)}$ 〃 $\varepsilon^{(l+2)}$ 〃 ∵ $H^{(l)}u_{l+2} = H^{(l)}b_{l+1}^\dagger\varphi^{(l+1)} \overset{*}{=} b_{l+1}^\dagger \underbrace{H^{(2)}\varphi^{(l+1)}}_{\varepsilon^{(l+2)}\varphi^{(l+1)}}$ ■

⋮

k $u_{l+k} := \overbrace{b_{l+1}^\dagger b_{l+2}^\dagger \cdots b_{l+k-1}^\dagger}^{k-1\,\text{コ}}\varphi^{(l+k-1)}$ 〃 $\varepsilon^{(l+k)}$ 〃

(**)から決まる

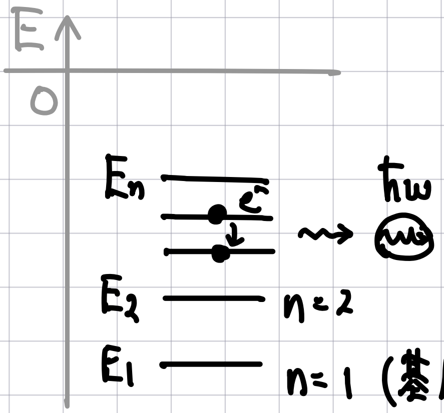
∵ 宿題2 これを示せ

よって $n := l+k$ とすると $\varepsilon^{(n)} = -\frac{1}{n^2}$ $\left(\underset{n-k}{l} \in \{0,1,\cdots,n-1\}:\text{縮退}\right)$

⇕

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{n^2}$$

$\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}$ ∥ 計算 13.6eV (実験と一致!)



e^- が $E_n \to E_m$ $(n>m)$ と遷移し、エネルギー $\hbar\omega$ の光を放出

波動関数 (kを用いない)

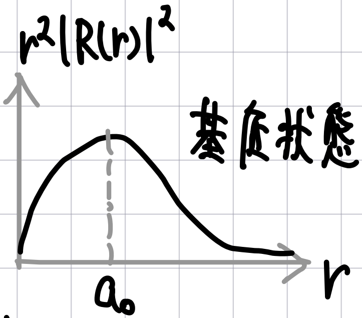
$$u_l^{(n)} := u_{\underbrace{l+k}_{n}} = \overbrace{b_{l+1}^\dagger \cdots b_{n-1}^\dagger}^{n-l-1\,\text{コ}}\varphi^{(n-1)}$$

(**) ⇔ $b_n\varphi^{(n-1)} = \left[\frac{1}{i}\frac{d}{d\rho} + i\left(\frac{n}{\rho} - \frac{1}{n}\right)\right]\varphi^{(n-1)} = 0$

解: $\varphi^{(n-1)}(\rho) = C_n\rho^n e^{-\frac{\rho}{n}}$ (C_n: 規格化因子)

$k = n-l \geq 1$

$n=1$ $(l=0\text{のみ})$ $\underset{k=1}{u_0^{(1)}} = \varphi^{(0)} = 2\rho e^{-\rho}$ →



$n=2$ $(l=0,1)$ $\underset{k=2}{u_0^{(2)}} = b_1^\dagger\varphi^{(1)} \xleftarrow{b_1^\dagger} \underset{k=1}{u_1^{(2)}} = \varphi^{(1)}$

$n=3$ $(l=0,1,2)$ $\underset{k=3}{u_0^{(3)}} = b_1^\dagger b_2^\dagger\varphi^{(2)} \xleftarrow{b_1^\dagger} \underset{k=2}{u_1^{(3)}} = b_2^\dagger\varphi^{(2)} \xleftarrow{b_2^\dagger} \underset{k=1}{u_2^{(3)}} = \varphi^{(2)}$

4.5 (一般)角運動量の固有値問題

定義4.5 $\mathcal{H}$上のエルミートops. $\hat{J}_k$ $(k\in\{1,2,3\})$ が以下をみたすとき、(一般)角運動量op.であるという。 (例)軌道角運動量op.(P17)

$$[\hat{J}_j, \hat{J}_k] = i\epsilon_{jk\ell}\hat{J}_\ell$$

ℓについての和

命題4.6 $\hat{\vec{J}}^2 := \sum_{k=1}^{3}\hat{J}_k^2$ とすると、$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_k] = 0$ $(\forall k)$

注4.7 $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_3] = 0 \Rightarrow \hat{\vec{J}}^2$と$\hat{J}_3$の同時固有状態 $|\lambda, m\rangle$ が存在

今は書かない

$\hat{\vec{J}}^2$, $\hat{J}_3$ の固有値のラベル

$$\begin{cases} \hat{\vec{J}}^2|m\rangle = \lambda|m\rangle & \cdots ③ \\ \hat{J}_3|m\rangle = m|m\rangle & \cdots ④ \end{cases}$$

λを省略　これを解く　$(\langle m|m\rangle = 1$とする$)$

'21 11/22

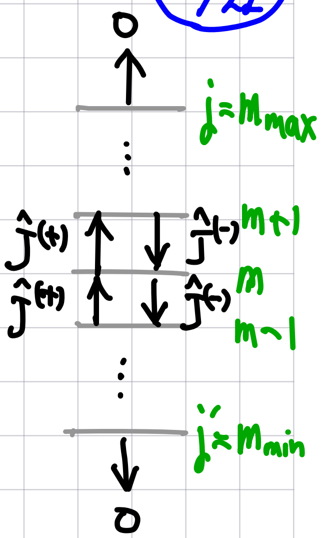
③より $\lambda = \langle m|\hat{\vec{J}}^2|m\rangle = \sum_{k=1}^{3}\left|\hat{J}_k|m\rangle\right|^2 \geq 0$

昇降ops.をdef:

$$\hat{J}^{(\pm)} := \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$$

(以後複号同順)

このとき
$$\begin{cases} [\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}^{(\pm)}] = 0 & \cdots ⑤ \\ \hat{J}_3\hat{J}^{(\pm)} = \hat{J}^{(\pm)}(\hat{J}_3 \pm 1) & \cdots ⑥ \\ \hat{J}^{(\pm)}\hat{J}^{(\mp)} = \hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_3^2 \pm \hat{J}_3 & \cdots ⑦ \end{cases}$$



補題4.8 $\hat{J}^{(\pm)}|m\rangle$ は $\hat{J}_3$ の固有ベクトルで固有値は $(m\pm 1)$

宿題1 ⑦を示せ 複号のどちらか一方だけでよい

$\because$ $\hat{J}_3\hat{J}^{(\pm)}|m\rangle \overset{⑥}{=} \hat{J}^{(\pm)}(\hat{J}_3 \pm 1)|m\rangle = (m\pm 1)\hat{J}^{(\pm)}|m\rangle$ ∎

命題4.9 $\hat{J}_3$の固有値 m には最大値・最小値がある。

また $j := m_{max}$ として $m = \underbrace{j, j-1, \cdots, -j}_{(2j+1)コ}$ であり、$\lambda = j(j+1)$

∵ $(\hat{J}_1^2+\hat{J}_2^2)|m\rangle = (\hat{\vec{J}}^2-\hat{J}_3^2)|m\rangle = (\lambda-m^2)|m\rangle$

$\therefore \langle m|(\quad〃\quad)|m\rangle = \lambda - m^2 \geqq 0$ ∴ m に最大・最小あり.

$j := m_{max}$, $j' := m_{min}$ とする: $\hat{J}^{(+)}|m=j\rangle = 0$, $\hat{J}^{(-)}|m=j'\rangle = 0$

$\therefore \quad \hat{J}^{(-)}\hat{J}^{(+)}|m=j\rangle \overset{⑦}{=} (\hat{\vec{J}}^2-\hat{J}_3^2-\hat{J}_3)|m=j\rangle = (\lambda-j^2-j)|m=j\rangle = 0$

$\hat{J}^{(+)}\hat{J}^{(-)}|m=j'\rangle \overset{〃}{=} (\hat{\vec{J}}^2-\hat{J}_3^2+\hat{J}_3)|m=j'\rangle = (\lambda-j'^2+j')|m=j'\rangle = 0$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = j(j+1) \\ \lambda = j'(j'-1) \end{cases} \Rightarrow (j+j')\overbrace{(j-j'+1)}^{>0\ (∵\ j\geqq j')} = 0 \Rightarrow j' = -j \quad ▨$$

系4.10 $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots\}$ ∵ 固有値の間隔の数 $= 2j \in \mathbb{Z}$

(例) $j=0$ のとき $m=0$, $\lambda=0$

$j=\frac{1}{2}$ 〃 $m\in\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$, $\lambda = \frac{3}{4}$

$j=1$ 〃 $m\in\{1, 0, -1\}$, $\lambda = 2$

位相因子 $=1$ とした

補題4.11 $\hat{J}^{(\pm)}|j, m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j, m\pm 1\rangle$

$|m\rangle$ を改めてこう書いた

∵ 補題4.8より、$\hat{J}^{(\pm)}|m\rangle = a_m^{(\pm)}|m\pm 1\rangle$ と書ける.

$\langle m-1|\hat{J}^{(-)}|m\rangle = a_m^{(-)}\langle m-1|m-1\rangle = a_m^{(-)}$

$\qquad\qquad \shortparallel$

$(\hat{J}^{(+)}|m-1\rangle)^\dagger|m\rangle = \overline{a_{m-1}^{(+)}}\langle m|m\rangle = \overline{a_{m-1}^{(+)}}$

一方、$\langle m|\hat{J}^{(-)}\hat{J}^{(+)}|m\rangle = |\hat{J}^{(+)}|m\rangle|^2 = |a_m^{(+)}|^2$

$\qquad\qquad \shortparallel$

$\langle m|(\hat{\vec{J}}^2-\hat{J}_3^2-\hat{J}_3)|m\rangle = j(j+1)-m(m+1) = (j-m)(j+m+1)$ ▨

4.6 軌道角運動量の固有値問題

4.3節に戻る. $\hat{\vec{L}} =: \hbar \hat{\vec{M}}$ とすれば. $\hat{\vec{M}}$ は一般角運動量op.の一例.

$$\begin{cases} M_x = \frac{1}{i}\left(-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ M_y = \frac{1}{i}\left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ M_z = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \quad \cdots ⑦ \end{cases}$$

$\cot x := \frac{1}{\tan x}$

$\vec{M}^2 Y(\theta,\phi) = \lambda Y(\theta,\phi)$ を解く. (λ, Y を求める)

$$M^{(\pm)} := M_x \pm i M_y \underset{\xi := \cos\theta}{=} e^{\pm i\phi}\left(\mp\sqrt{1-\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$(0 \leq \theta \leq \pi)$ $\quad (\sin\theta = \sqrt{1-\xi^2})$

$$\vec{M}^2 = -\frac{\partial}{\partial\xi}(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$Y_m(\theta,\phi) := \langle \xi, \phi | m \rangle$ とすると. ← ③,④のもの

④と⑦

$$M^{(\pm)} Y_m = e^{\pm i\phi}\left(\mp\sqrt{1-\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{m\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) Y_m$$

$$= \mp e^{\pm i\phi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{\pm m+1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{\mp m} Y_m$$

$j = m_{max}$ を l と書く

ξによらない

$$M^{(+)} Y_l = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{-l} Y_l = \text{const.} \quad \cdots ⑧$$

宿題2

これを示せ (e.g. 帰納法)

一方. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$(M^{(-)})^n Y_m = e^{-in\phi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{-m+n}\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}\left(\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^m Y_m\right) \quad \cdots ⑨$$

↓ $m = l, n = 2l+1$

$$(M^{(-)})^{2l+1} Y_l = e^{-i(2l+1)\phi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^{l+1}\frac{\partial^{2l+1}}{\partial\xi^{2l+1}}\left(\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^l Y_l\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^{2l+1}}{\partial\xi^{2l+1}}\left\{\underbrace{\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^l Y_l}_{\shortparallel}\right\} = 0$$

$\therefore$ ξの$2l$次の多項式 … ⑩

jと違って $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots$ はない

⑩ ÷ ⑧ $\Rightarrow$ $(1-\xi^2)^l =$ (ξの$2l$次の多項式) $\Rightarrow l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

〈波動関数〉

$$\vec{M}^2 \underbrace{Y_m(\theta,\phi)}_{\shortparallel} = l(l+1) Y_m(\theta,\phi) \quad \leftarrow ①$$

$\downarrow$ $F_m(\xi) e^{im\phi}$: 変数分離(可能)

$$\left(\frac{d}{d\xi}(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi} - \frac{m^2}{1-\xi^2} + l(l+1)\right) F_m(\xi) = 0$$: ルジャンドル陪微分方程式

⑧: $Y_{l,l} = a_l \left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^l e^{il\phi} = a_l \sin^l\theta \, e^{il\phi}$ … ⑪

$a_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$ 規格化(P18) $\leftarrow$ $\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^l d\xi = \frac{2^{2l+1}(l!)^2}{(2l+1)!}$

$\downarrow (M^{(-)})^{l-m}$

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) \overset{4.11}{=} \frac{1}{\sqrt{(l+m+1)(l-m)}} M^{(-)} Y_{l,m+1} = \cdots$$

$$= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}} (M^{(-)})^{l-m} Y_{l,l}$$

$$\underset{\&\ ⑪}{\overset{⑨: n=l-m,\, m=l}{=}} \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(l+m)!(2l+1)}{4\pi(l-m)!}} \frac{e^{im\phi}}{\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^m}\frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}}(1-\xi^2)^l$$

球面調和関数 ($\fallingdotseq$ $e^{im\phi}$を除けば ルジャンドル陪関数)

(SO(3)の既約表現のbasis)

〈水素原子まとめ〉

束縛状態 $\varphi_{n,l,m}(\vec{r}) = R_n(r)\, Y_{l,m}(\theta,\phi)$

$\shortparallel$

$\langle \vec{r} | n, l, m \rangle$

n: 主量子数 (エネルギー準位のラベル) $\in \{1, 2, \cdots\}$

l: 方位 〃 $\in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ nコ

m: 磁気 〃 $\in \{-l, \cdots, l\}$ $(2l+1)$コ

n-th 励起状態に入りうる電子数 $= \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) \times \underbrace{2}_{\text{電子の}\uparrow\downarrow\text{の自由度（スピン）}} = 2n^2$

↓

2 K殻

8 L 〃

18 M 〃

⋮

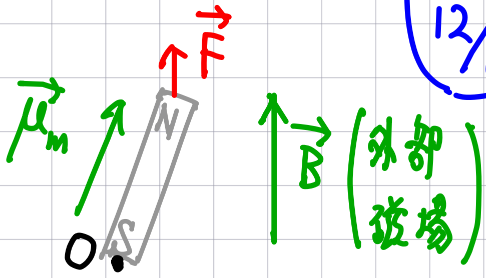
(cf. 魔法数)

4.7 スピン角運動量

'21 12/6

スピン自由度 = 粒子の「自転」に相当する粒子固有の自由度

cf. 磁石の磁気モーメント $\vec{\mu}_m$



ポテンシャルエネルギー

$$V_m = -\vec{\mu}_m \cdot \vec{B}$$

Pauli: $\vec{\mu}_m \propto \hbar \vec{J} =: \vec{S}$ と考えた.(磁性の起源)

← 一般角運動量 ($j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ も含む)

電子では $\vec{\mu}_m = \frac{e}{2m}\left(\vec{L} + g\vec{S}\right)$ $\quad g \fallingdotseq 2$ (g因子) ← 起源は相対論的考察が必要

→ 磁場中の電子のふるまいを説明 (Zeeman効果など)

状態空間は拡張される:

$$\hat{H}_0, \vec{L} \qquad \vec{S}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_S$$

← これだけに着目すれば有限次元 (これを調べよう)

(これまでの状態空間) ⊗ (スピンop.の作用する空間)

$$\ni \qquad \ni$$

$$|n, l, \underline{m'}\rangle \otimes |j, \underline{m}\rangle$$

違うエム ($m' \in \{-l, -l+1, \cdots, l\}$)

〈4.5節のまとめ〉

$$[\hat{J}_j, \hat{J}_k] \overset{4.5}{=} i\epsilon_{jkl}\hat{J}_l, \quad [\hat{\vec{J}}^2, J_k] \overset{4.6}{=} 0,$$

$$\hat{\vec{J}}^2 |j, m\rangle \overset{③}{\underset{4.9}{=}} j(j+1)|j, m\rangle, \quad \hat{J}_3 |j, m\rangle \overset{④}{=} m|j, m\rangle,$$

$$\underbrace{\hat{J}^{(\pm)}}_{= \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2} |j, m\rangle \overset{4.11}{=} \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\, |j, m\pm 1\rangle \qquad m \in \underbrace{\{-j, -j+1, \cdots, j\}}_{(2j+1)\text{コ}}$$

以下すべて複号同順

例4.12 スピン$\frac{1}{2}$ $(j=\frac{1}{2})$ $\hat{\vec{S}} = \hbar\hat{\vec{J}}$

$m = -\frac{1}{2}$ or $\frac{1}{2}$ (2準位系) $\Rightarrow$ $|\pm\rangle := |j=\frac{1}{2}, m=\pm\frac{1}{2}\rangle$

この基底による $\hat{\vec{J}}$ の行列表示:

$$(\hat{J}_z|+\rangle,\ \hat{J}_z|-\rangle) = (|+\rangle,\ |-\rangle)\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{J_z\ (\text{スピン表示})}$$

$$J_z = \begin{pmatrix}\langle +|\hat{J}_z|+\rangle & \langle +|\hat{J}_z|-\rangle \\ \langle -|\hat{J}_z|+\rangle & \langle -|\hat{J}_z|-\rangle\end{pmatrix}$$ とも書ける

同様に $\hat{J}_x = (1/2)(\hat{J}^{(+)} + \hat{J}^{(-)})$ 等より

$$J_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad J_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{J}^2 = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$J^{(+)} = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad J^{(-)} = \begin{pmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad \left(|+\rangle \equiv \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix},\ |-\rangle \equiv \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}\right)$$

宿題1 $\hat{J}_y$ のスピン表示を求めよ. ($\hat{J}^{(+)}, \hat{J}^{(-)}$ との関係を求めるとよい)

定義4.13 以下をPauli(のスピン)行列という

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

命題4.14

(i) $\sigma_k^2 = 0 \quad (\forall k)$

(ii) $\sigma_j\sigma_k = i\epsilon_{jkl}\sigma_l \Rightarrow [\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$

(iii) $\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 0 \quad (\forall k \neq j)$

$S^2 \cong \mathbb{C}P^1$

注4.15 $\mathcal{H}_s$ の元 $= |\psi_s\rangle = |+\rangle\underbrace{\langle +|\psi_s\rangle}_{C_+} + |-\rangle\underbrace{\langle -|\psi_s\rangle}_{C_-}$ 法則1より. 連比$[C_+ : C_-]$が状態を定める

スピン軌道相互作用

水素原子内の電子の(スピンを考慮した)ハミルトニアン:

相対論的考察から決まる

$$H = H_0 + f(r)\,\underbrace{\vec{L}\cdot\vec{S}}_{\parallel} \quad \cdots ⑫$$

正確には $H_0 \otimes 1_S$　　$\sum_k L_k \otimes S_k$

$\vec{S} \propto \vec{\mu}_m$, $\vec{L} \propto \vec{B}$ "電子から見ると陽子が $\vec{L}$ を持ち $\vec{B}$ を生じる"

命題4.16 ⑫において、$\vec{L}+\vec{S}$ は保存量

($\vec{L}, \vec{S}$ それぞれは保存しない)

☺ $\vec{L}+\vec{S} = \vec{L}\otimes 1_S + 1_0 \otimes \vec{S}$ に注意.　※ $L_k \otimes S_k \cdot L_l \otimes 1_S = L_k L_l \otimes S_k 1_S$

$[H_0, \vec{L}] = 0$, $[H_0, \vec{S}] = 0$ は OK. 一方

$$[f(r)\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{L}] = f(r)[\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{L}] = +i\hbar f(r)\vec{L}\times\vec{S} \neq \vec{0}$$

$$[f(r)\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{S}] = f(r)[\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{S}] = -i\hbar f(r)\vec{L}\times\vec{S} \quad 〃$$

$$\therefore [f(r)\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{L}+\vec{S}] = 0 \Rightarrow [H, \vec{L}+\vec{S}] = 0$$

$$([\quad 〃 \quad, \vec{L} \text{ or } \vec{S}] \neq 0 \Rightarrow [H, \vec{L} \text{ or } \vec{S}] \neq 0) \quad ▨$$

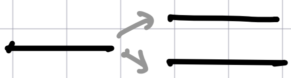
宿題2 これを示せ(テンソル積⊗を書いて正確に計算 1つの成分だけでよい)

⑫に対する Sch. eq. (位置・スピン表示)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi(\vec{r},+)\\ \psi(\vec{r},-)\end{pmatrix} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_c(r)\right)\begin{pmatrix}\psi(\vec{r},+)\\ \psi(\vec{r},-)\end{pmatrix}$$

$$+\frac{\hbar}{2}f(r)\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}L_x + \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}L_y + \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}L_z\right]\begin{pmatrix}\psi(\vec{r},+)\\ \psi(\vec{r},-)\end{pmatrix}$$

⇝ 微細構造分裂を説明: $l \neq 0$



エネルギー準位の分裂

4.8 水素原子のSO(4)対称性

Pauliによる解法(1926年) (詳しくはレポート)

4.4節の議論に戻る($E<0$):

カッパ

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + V(r), \quad V(r) = -\frac{\kappa}{r} \quad \left(\kappa := \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)$$

以下のop.を導入:

$$\vec{A} := \frac{1}{2m}(\vec{L}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{L}) + \kappa\frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{A}$は保存量($[H,\vec{A}]=0$)であり、Runge-Lenz-Pauliベクトルという

$$\vec{A}^{\,2} = \frac{2}{m}(\vec{L}^{\,2}+\hbar^2)H + \kappa^2 = \frac{2E}{m}(\vec{L}^{\,2}+\hbar^2) + \kappa^2 \quad \cdots ⑬$$

<u>命題4.17</u> $\vec{K} := \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\vec{A}$ とすると

固有状態に作用していると思い $\hat{H}\to E$ とした(以下同様)

以下の交換関係式が得られる:

$$[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l, \quad [K_j, K_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l$$

$$[L_j, K_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}K_l$$

($\underbrace{\{L_j, K_l\}}_{6つ}$はSO(4)のLie環の生成子となす)

<u>命題4.18</u> $\hat{\vec{S}}^{\pm} := \frac{1}{2}(\hat{\vec{L}} \pm \hat{\vec{K}})$ とすると

$$[S_j^{\pm}, S_k^{\pm}] = i\hbar\epsilon_{jkl}S_l^{\pm}, \quad [S_j^{+}, S_k^{-}] = 0 \leftarrow \left(\underbrace{\mathfrak{so}(4)}_{6つ} \simeq \underbrace{\mathfrak{su}(2)}_{3つ} \oplus \underbrace{\mathfrak{su}(2)}_{3つ}\right)$$

2つの一般角運動量ops.!

$(S^{\pm})^2 = \frac{1}{4}(\vec{L}^{\,2}+\vec{K}^{\,2})$ より、±どちらの場合も固有値は $s(s+1)\hbar^2$

$$s(s+1)\hbar^2 = \frac{1}{4}\left(-\hbar^2 + \frac{m\kappa^2}{2|E|}\right) \quad (⑬)$$

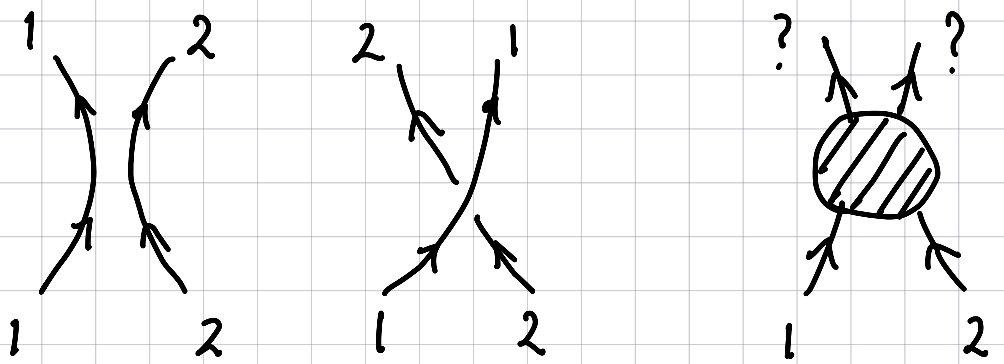
$$\therefore E = -\frac{m\kappa^2}{2\hbar^2 n^2} \quad \left(n := 2s+1 \in \{1, 2, \cdots\}\right)$$

§5 ボゾンとフェルミオン

5.1 同種粒子

<u>定義5.1</u> 2個の粒子が同種粒子である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ それらの質量・スピン・電荷などの粒子固有の物理量が同じである

<u>仮説5.2</u> 量子論では同種粒子は識別できない



古典論（それぞれの軌道を追跡可能）　　量子論（確率解釈→追跡不可能）

N個の同種粒子からなるシステムを考える：

$$\psi(q_1, q_2, \cdots, q_N; t) \qquad q_k := (\vec{r}_k, m_k)$$

スピンのz成分（+ or − など）

位置・スピン表示

2粒子の入れ替え op.（Hと可換）

$$P_{kl}\psi(\cdots q_k \cdots q_l \cdots; t) := \psi(\cdots q_l \cdots q_k \cdots; t)$$

$$\| \; 5.2$$

定数

$$c_{kl}\psi(\cdots q_k \cdots q_l \cdots; t)$$

$$P_{kl}^2 = id \Rightarrow c_{kl}^2 = 1 \Rightarrow c_{kl} = \pm 1$$

<u>定義5.3</u> $\forall k, l$ に対して，$c_{kl} = +1$（対称）⇒ Bose粒子（ボゾン）という

$= -1$（反対称）⇒ Fermi粒子（フェルミオン）

注5.4 実は

ボゾン ⇔ スピン 0 or 1 or 2 (整数)

フェルミオン ⇔ 〃 $\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$ (半奇数)

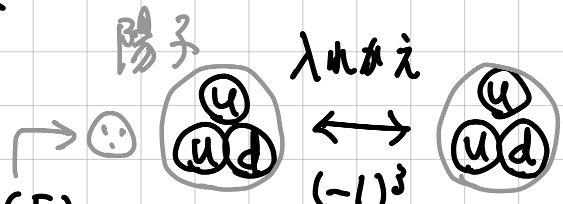
例5.5 素粒子

(B) スピン0 : Higgs 粒子

(F) スピン$\frac{1}{2}$: クォーク (u, d, …), 反クォーク ($\bar{u}, \bar{d}$, …), レプトン(電子 e^-, ミューオン, ニュートリノ, …)
反レプトン(陽電子 e^+, …)

(B) { スピン1 : 光子, W・Z ボゾン, グルーオン
スピン2 : 重力子

例5.6 複合粒子



陽子 $p = uud$: (F)

中性子 $n = udd$: (F)

4ヘリウム $^4\mathrm{He} = \overbrace{ppnn}^{4コ} + 2e^-$: (B)

3ヘリウム $^3\mathrm{He} = \overbrace{ppn}^{3コ} + 2e^-$: (F)

電荷

u : アップクォーク $(+\frac{2}{3})$

d : ダウン 〃 $(-\frac{1}{3})$

宿題1 重水素原子 $^2\mathrm{H}$ および パイ中間子 π は ボゾンかフェルミオンか? (構成要素を記載すること)

命題5.7 N個のボゾン, フェルミオンの波動関数は以下のようにそれぞれ対称関数, 反対称関数で記述される:

Schr. eq の解

$$\psi_B(q_1, \cdots, q_N; t) = \frac{C_B}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \psi(q_{\sigma(1)}, \cdots, q_{\sigma(N)}; t)$$

☺ レポート?

$$\psi_F(\quad 〃 \quad) = \frac{C_F}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \psi(q_{\sigma(1)}, \cdots, q_{\sigma(N)}; t)$$

5.2 独立粒子近似

N粒子間の相互作用を無視する近似で定常状態を考える.

$$H\varphi = \sum_{k=1}^{N}\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_k + V(q_i)\right)}_{\text{\(\stackrel{k番目}{H_k}\) } (=1\otimes\cdots\otimes H_k\otimes\cdots\otimes 1)}\varphi = E\varphi \qquad \cdots (*)$$

共通

それぞれの粒子:

$$H_k\,\varphi_{n_k}(q_k) = E_{n_k}\varphi_{n_k}(q_k) \qquad k\in\{1,\dots,N\}$$

量子数を1種類のラベルで表記

$\hat q_1, \hat p_1 \quad \cdots \quad \hat q_N, \hat p_N$

$\mathcal{H}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}$

正確には $\otimes$

$\Downarrow$

(*)の解 $\varphi_{n_1\cdots n_N}(q_1,\dots,q_N) = \varphi_{n_1}(q_1)\cdot\varphi_{n_2}(q_2)\cdots\varphi_{n_N}(q_N)$

$$E = E_{n_1}+\cdots+E_{n_N}$$

宿題2 $N=3$の場合の$\varphi^{(B)}$を書き下し, $q_1\leftrightarrow q_2$の入れかえで不変であることを確認せよ

<u>命題5.8</u> 以上の設定にて

$$\varphi^{(B)}_{n_1\cdots n_N}(q_1,\dots,q_N) = \frac{C_B}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\varphi_{n_1}(q_{\sigma(1)})\cdots\varphi_{n_N}(q_{\sigma(N)})$$

$\mathrm{Sym}_N(\mathcal{H})$: 対称代数

$$\varphi^{(F)}_{n_1\cdots n_N}(q_1,\dots,q_N) = \frac{C_F}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\varphi_{n_1}(q_{\sigma(1)})\cdots\varphi_{n_N}(q_{\sigma(N)})$$

$\bigwedge^N(\mathcal{H})$: 外積代数

$$\stackrel{規格化}{=}\frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix}\varphi_{n_1}(q_1) & \varphi_{n_1}(q_2) & \cdots & \varphi_{n_1}(q_N)\\ \varphi_{n_2}(q_1) & \varphi_{n_2}(q_2) & \cdots & \varphi_{n_2}(q_N)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n_N}(q_1) & \varphi_{n_N}(q_2) & \cdots & \varphi_{n_N}(q_N)\end{vmatrix} : \text{Slater行列式}$$

☺ レポート

$n_k = n_l \Rightarrow$ 行列式 $=0$

<u>注5.9</u>

(i) フェルミオンは同一状態に2個以上入れない (Pauliの排他律)

(ii) ボゾンは 〃 いくらでも入れる

cf. ボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) ⇝ 超伝導(eのクーパー対) など低温物理の理解の鍵

'21 12/20

§6 特殊相対性理論

このsectionは再び古典論(力学&電磁気学)

6.1 電磁場の古典論

4次元時空 $(t, \vec{x})$ を考える
時間 空間

法則 6.1 (「真空中の」マクスウェルの方程式) [ガウス単位系]
← 電荷・電流の源以外、物質がない(真空)

電場 $\vec{E}(t,\vec{x})$ と 磁場 $\vec{B}(t,\vec{x})$ に関する基本法則
「磁束密度」in [SI単位系]

$$
(\mathrm{M})\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho & \cdots ① \\
\nabla\cdot\vec{B} = 0 & \cdots ② \\
\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \cdots ③ \\
\nabla\times\vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \cdots ④
\end{cases}
$$

$\rho(t,\vec{x})$: 電荷密度

$\vec{j}(t,\vec{x})$: 電流密度

$c \fallingdotseq 3.0\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$ (光速度)
$= \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

注 6.2
・物質中ではもう少し複雑
・$\vec{E}$ と $\vec{B}$ は対称的 ($\rho=0, \vec{j}=\vec{0}$: $\vec{E}\to-\vec{B}$, $\vec{B}\to\vec{E}$ で(M)不変)
・単位系を変えると係数・呼び名が変わる ([SI単位系]など)

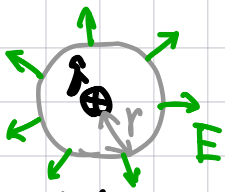
命題 6.3

$$
\begin{cases}
② : \nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow {}^{\exists}\vec{A}(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\
③ : \nabla\times\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow {}^{\exists}\phi(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}
\end{cases}
$$

∵ ポアンカレの補題 (ただし領域の単連結性は仮定) ☒

注 6.4 (物理的意味)

①: ガウスの法則 $E = k\dfrac{q}{r^2}$



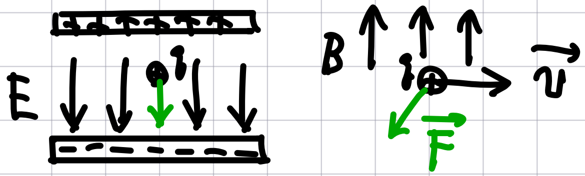
②: モノポール (N極 or S極のみ) の非存在

③: ファラデーの電磁誘導の法則 etc.

④: ビオ・サバールの法則 etc.

法則6.5 (荷電粒子qが背景電磁場から受ける力)

$$\vec F = q\left(\vec E + \frac{1}{c}\vec v\times\vec B\right) \quad \cdots ⑤$$ ローレンツ力



6.2 方程式の対称性(方程式を不変に保つ座標変換)

(N) ニュートンの運動方程式 $m\ddot{\vec r} = \vec F$ ←t微分

Galilei Boost (G.B.)

定義6.6 (ガリレイ変換) := (3次元回転)⑥ + (ガリレイ・ブースト)⑦ + (平行移動)⑧

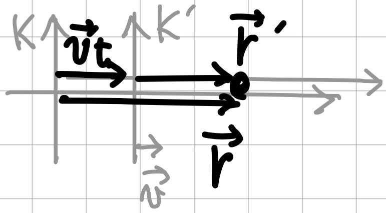
$\vec r' = R(\theta)\vec r$

$$\begin{cases} \vec r' = \vec r - \vec v t \\ t' = t \ (\text{絶対時間}) \end{cases}$$

$\vec r' = \vec r + \vec a$

広義には(3次元直交変換) 回転&折り返し

直線的な慣性系間の座標変換



定理6.7 ガリレイ変換の下、mが不変で、

$\vec F$が⑦⑧で不変&⑥で$\vec r$と同じ変換性をもつ ⇒ (N)は不変

∵ G.B.: $\ddot{\vec r}' = \ddot{\vec r}$, 回転: $m\ddot{\vec r}' - \vec F' = R(\theta)(m\ddot{\vec r} - \vec F) = \vec 0$ ■

命題6.8 ガリレイ変換全体は群をなす(ガリレイ変換群)

(M) マクスウェルの方程式(少し特別な状況で考察)

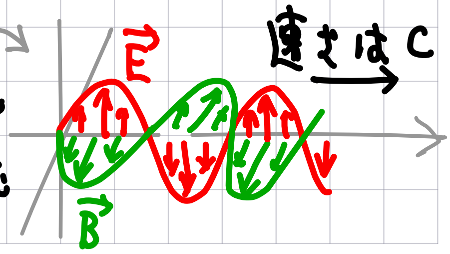
命題6.9 $\rho = 0, \vec j = \vec 0$のとき、$\vec E$と$\vec B$は波動方程式をみたす

(W) $(-\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)\vec E = \vec 0$ (or $\vec B$)　この解を電磁波(光)という

$\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$, $x^0 := ct$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$

③: $\vec B \rightsquigarrow \vec E$を生む

④: $\vec E \rightsquigarrow \vec B$を生む



☺ 宿題1 これを示せ（$\vec{E}$ or $\vec{B}$ どちらか） $\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \Delta\vec{v}$ を用いてよい

簡単のため空間1次元で考える

命題 6.10 1次元波動 eq. $\underbrace{(\partial_0^2 - \partial_1^2)}_{= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}} f(x^0, x^1) = 0$ は以下の変換の下、不変

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\theta & \mathrm{sh}\theta \\ \mathrm{sh}\theta & \mathrm{ch}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

ch := cosh sh := sinh

☺ $\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta = 1$ と連鎖律 ▨

cf. 1次元ラプラス eq. $(\partial_0^2 + \partial_1^2) f(x^0, x^1) = 0$ は以下の変換の下不変

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

☺ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 〃 ▨

定義 6.11 （ローレンツ変換）＝（3次元回転）＋（ローレンツ・ブースト）

広義には（3次元直交変換）

Lorentz Boost (L.B.)

$$(\mathrm{L.B.}) \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\shortparallel} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$\beta := \frac{v}{c}, \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

注 6.12

- $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\xi & -\mathrm{sh}\xi \\ -\mathrm{sh}\xi & \mathrm{ch}\xi \end{pmatrix}$ と書ける（$\mathrm{ch}\xi = \gamma$, $\mathrm{sh}\xi = \beta\gamma$, $\tanh\xi = \beta$）
- $\beta = \frac{v}{c} \to 0$ で (L.B.) → (G.B.)

定理 6.13 (M) は ローレンツ変換の下、不変

☺ レポート & 後日 ▨

命題 6.14 ローレンツ変換全体は群をなす

注 6.15

- (W) は ガリレイ変換で形が変わる
- (N) は ローレンツ変換 〃

宿題2 双曲線関数

$\mathrm{ch}\,\theta := \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$, $\mathrm{sh}\,\theta := \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$

について以下を証明せよ：

- $\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta = 1$
- $\mathrm{sh}(i\theta) = i\sin\theta$

まとめ	古典力学	電磁気学
ガリレイ変換	不変	×
ローレンツ変換	×	不変

'21 12/27

6.3 特殊相対性理論

基本原理 6.16 (アインシュタイン, 1905)

(I) 物理法則はどの慣性系においても同一である(特殊相対性原理)

(II) 光速はどの慣性系においても一定の値 c をとる(光速不変の原理)

定義 6.17 6.16に基づく理論を特殊相対論 or 相対論的理論という

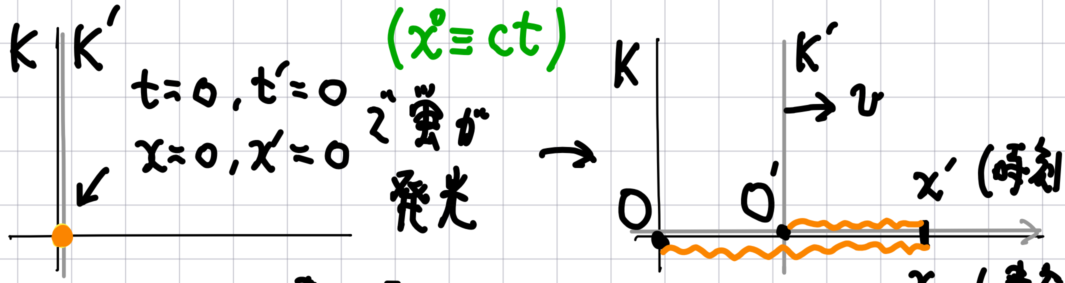
注 6.18 •(II)の根拠: (M) & マイケルソン・モーレーの実験(1887)

•慣性系同士の座標変換はガリレイ変換ではなくローレンツ変換

((N)は6.16をみたすように修正される＝相対論的力学)

命題 6.19 $s^2 := -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ は慣性系によらない不変量

☺ $t=0,\ t'=0$, $x=0,\ x'=0$ で蛍が発光 ($x^0 \equiv ct$) →



x' (時刻 t') $(ct')^2 = (x')^2$

x (時刻 t) $(ct)^2 = x^2$

(1次元で考える)

$$\Downarrow$$

$$-(ct')^2 + x'^2 = -(ct)^2 + x^2 (=0) \ \blacksquare$$

命題 6.20 (速度の合成則: 1次元)

$\Lambda(v)$: (L.B.)とする. (cf. 6.11)

$$\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \Lambda(V),\ ただし\ V = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

($0 < v_1, v_2 < c$ のとき $V < c$) 宿題1 これを示せ

☺ LHS $= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi_1 & -\mathrm{sh}\,\xi_1 \\ -\mathrm{sh}\,\xi_1 & \mathrm{ch}\,\xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi_2 & -\mathrm{sh}\,\xi_2 \\ -\mathrm{sh}\,\xi_2 & \mathrm{ch}\,\xi_2 \end{pmatrix} \underset{\text{定理}}{\overset{\text{加法}}{=}} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\xi_1+\xi_2) & -\mathrm{sh}(\xi_1+\xi_2) \\ -\mathrm{sh}(\xi_1+\xi_2) & \mathrm{ch}(\xi_1+\xi_2) \end{pmatrix}$

$$\tanh(\xi_1+\xi_2) = \frac{\tanh\xi_1 + \tanh\xi_2}{1+\tanh\xi_1 \tanh\xi_2} = \frac{\frac{v_1}{c}+\frac{v_2}{c}}{1+\frac{v_1}{c}\frac{v_2}{c}} \equiv \frac{V}{c}$$

V 合成速度 $\blacksquare$

$\left(\tanh\xi_i = \frac{v_i}{c}\right)$

宿題2 加法定理 $\mathrm{ch}(\theta_1+\theta_2)=\mathrm{ch}\theta_1\,\mathrm{ch}\theta_2+\mathrm{sh}\theta_1\,\mathrm{sh}\theta_2$ を示せ（ch, sh の定義は P36 宿題2と同じ） 38

・ミンコフスキー・ダイヤグラムによる図示（1次元）

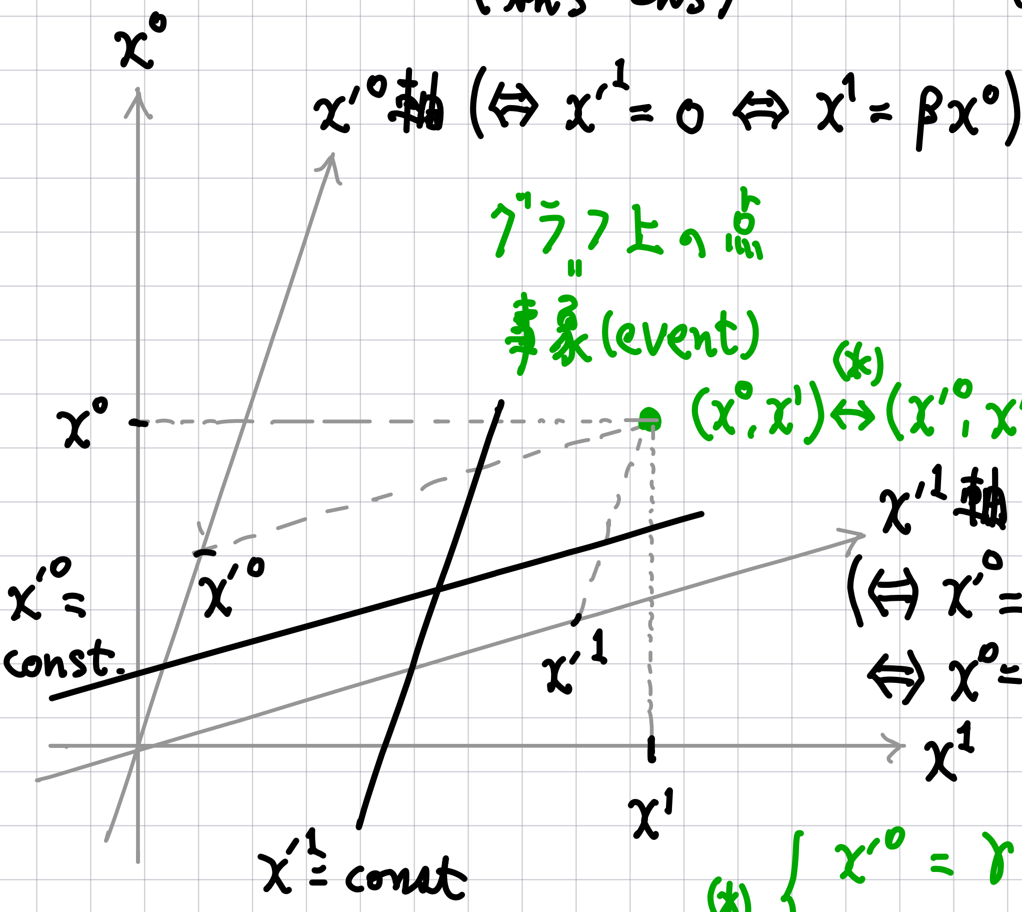
$$(\text{L.B.})\quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\displaystyle \Lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\xi & -\mathrm{sh}\xi \\ -\mathrm{sh}\xi & \mathrm{ch}\xi \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

$$\beta=\frac{v}{c},\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\tanh\xi := \frac{\mathrm{sh}\xi}{\mathrm{ch}\xi}=\beta$$

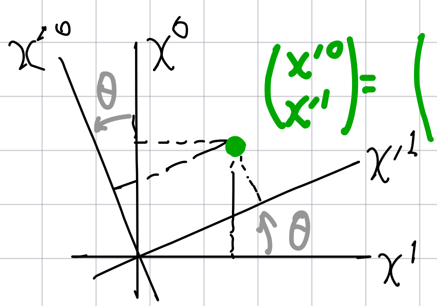
$\left(\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$ のとき $\left.\gamma=2\right)$

光速の約86%



$$(*)\ \begin{cases} x'^0=\gamma(x^0-\beta x^1) \\ x'^1=\gamma(-\beta x^0+x^1) \end{cases}$$

cf. ユークリッド空間での角度θの回転



$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$ ：座標値の対応関係

x'^1軸 $\Leftrightarrow x'^0=0 \Leftrightarrow \cos\theta\cdot x^0-\sin\theta\cdot x^1=0$

$\Leftrightarrow x^0=\tan\theta\cdot x^1$

〈簡単な帰結〉

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \end{cases} \quad (*)$$

(i) 時間の遅れ

$x'^1 = 0$ に K' の時計があり、時刻 t' を指している

K'系：$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix}$ とする

これを K 系から見ると $\Lambda\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} \overset{ct}{\overset{\parallel}{x^0}} \\ x^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\Lambda^{-1}}_{\begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma \\ +\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' \\ \beta\gamma ct' \end{pmatrix}$

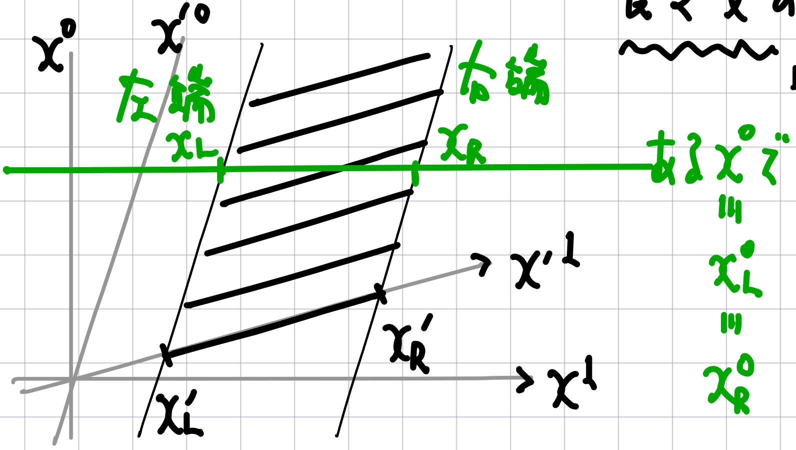
$\therefore t = \gamma t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t'$ ← 1より大！

例えば $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　$t' = 1 \leftrightarrow t = 2$

K'の"1時"は Kの"2時"

（K から K' の時計を見ると、ゆっくり進んでいる⁈）

(ii) 長さの「短縮」



長さ l の棒が K 系に対して等速運動（左図）

$\Leftrightarrow$ $x_R' - x_L' = l$

$x^0 = x_L^0 = x_R^0$

㊟ 棒の長さとは同じ時刻における両端の座標値の差　棒が「縮んだ」

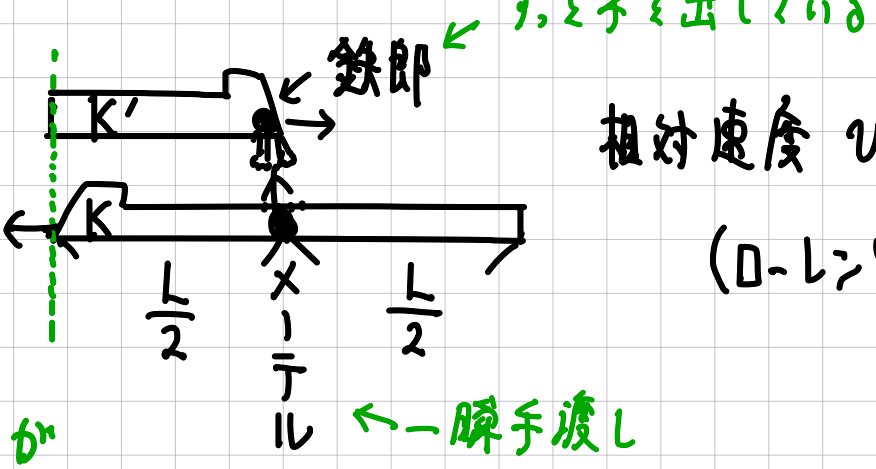
K 系での棒の長さは K における同時刻での両端の座標値の差　$\Updownarrow$ 1より小

$$\left.\begin{aligned} x_R' &= \gamma(-\beta x_R^0 + x_R) \\ x_L' &= \gamma(-\beta x_L^0 + x_L) \end{aligned}\right\} \text{辺々引くと} \quad \underbrace{x_R' - x_L'}_{l} = \gamma(x_R - x_L) \quad \therefore x_R - x_L = \frac{1}{\gamma} l$$

($x_R^0 = x_L^0$)

"パラドックス" 6.21 (正月の暇つぶし)

同じ長さんの銀河鉄道



相対速度 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

(ローレンツ短縮により長さは半分)

Kの先頭がK'の尾に一致した瞬間にメーテルからイソジンを手渡す作戦 (図の仮定でOK!)

と・こ・ろ・が. K'から見るとKの方が縮んでいる (受けとれない??)

問題 10. (特殊相対論のパラドックス：銀河鉄道 999 編) 本問は講義ノート 40 ページのお正月の暇つぶし問題であり，レポート問題ではなく配点はありません！

静止しているときには同じ長さの銀河鉄道 K 号と K' 号が，宇宙空間で正反対の方向に相対速度 $v = (\sqrt{3}/2)c$ で走っているとする (c は光速度). K 号にはメーテルが乗っていて, K' 号のちょうど先頭に乗っている鉄郎に列車すれ違いの際，イソジンを渡そうと考えている．受け渡しは一瞬で問題なく行われるものとする．(ツッコミはなしでお願いいたします.)

さて，K 号から見ると K' 号はローレンツ短縮を起こして半分の長さになっているので，メーテルは K **号の先端が** K' **号の最後尾に一致した瞬間**に K 号のちょうどど真ん中の位置で，手渡せばよいと考えた．

その旨鉄郎に伝えて, いよいよアンドロメダ星雲にてすれ違いのときがやってきた．メーテルは K 号のど真ん中で上記 (太字) の時刻にアビガンを瞬間差し出しするつもりでいる．鉄郎はいつでも受け取れるよう受け手をずっと窓から差し出している．ところがハッと鉄郎は思った．K' 号から見れば K 号がローレンツ短縮を起こして半分の長さになっているので，これだと受け取れない！

果たしてイソジンは無事手渡せたであろうか？ミンコフスキー・ダイヤグラムを用いて説明せよ．メーテル・鉄郎の軌跡 (世界線) および問題文の**太字の事象**をダイヤグラム内に明記せよ．(2 人それぞれの座標系を基準としてダイヤグラムを書き，どちらから見ても結果に矛盾がないことを確かめよ．なおイソジンだけは受け渡ししてはダメだと思われる人は他の物品に変更して本問を解いても構わない．過去問では「みかん」「ドリアン」「赤福」「アビガン」が受け渡しされた実績がある．)