6.3 特殊相対性理論

'21 12/27

基本原理6.16 (アインシュタイン, 1905)

(I) 物理法則はどの慣性系においても同一である(特殊相対性原理)

(II) 光速はどの慣性系においても一定の値 c をとる(光速不変の原理)

定義6.17 6.16に基づく理論を特殊相対論 or 相対論的理論という

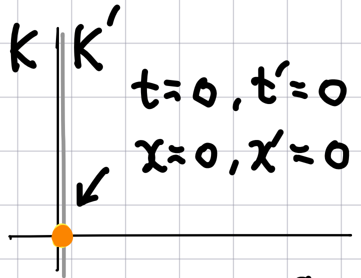
注6.18 ・(II)の根拠: (M) & マイケルソン・モーレーの実験(1887)

・慣性系同士の座標変換はガリレイ変換ではなくローレンツ変換

((N)は6.16をみたすように修正される=相対論的力学)

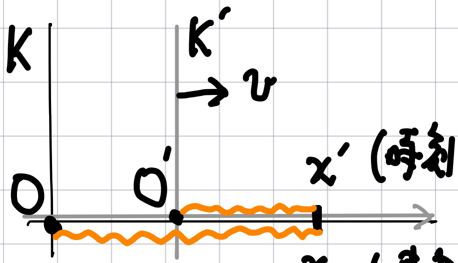
命題6.19 $s^2 := -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ は慣性系によらない不変量

☺



$t=0,\ t'=0$
$x=0,\ x'=0$ で電球が発光 ($x^0 \equiv ct$)

→



x' (時刻 t') $(ct')^2 = (x')^2$

x (時刻 t) $(ct)^2 = x^2$

(1次元で考える)

$$\Downarrow$$

$$-(ct')^2 + x'^2 = -(ct)^2 + x^2 \ (=0) \quad ▨$$

命題6.20 (速度の合成則:1次元)

$\Lambda(v)$: (L.B)とする. (cf. 6.11)

$$\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \Lambda(V),\ \text{ただし}\ V = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

($0<v_1, v_2<c$ のとき $V<c$) 宿題1 ←これを示せ

☺

$$\text{LHS} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi_1 & -\mathrm{sh}\,\xi_1 \\ -\mathrm{sh}\,\xi_1 & \mathrm{ch}\,\xi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi_2 & -\mathrm{sh}\,\xi_2 \\ -\mathrm{sh}\,\xi_2 & \mathrm{ch}\,\xi_2 \end{pmatrix} \underset{\text{加法定理}}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\xi_1+\xi_2) & -\mathrm{sh}(\xi_1+\xi_2) \\ -\mathrm{sh}(\xi_1+\xi_2) & \mathrm{ch}(\xi_1+\xi_2) \end{pmatrix}$$

$$\tanh(\xi_1+\xi_2) = \frac{\tanh\xi_1 + \tanh\xi_2}{1+\tanh\xi_1\tanh\xi_2} = \frac{\frac{v_1}{c}+\frac{v_2}{c}}{1+\frac{v_1}{c}\frac{v_2}{c}} \equiv \frac{V}{c}$$

V 合成速度 ▨

$\left(\tanh\xi_i = \frac{v_i}{c}\right)$

宿題2 加法定理 $\mathrm{ch}(\theta_1+\theta_2)=\mathrm{ch}\,\theta_1\,\mathrm{ch}\,\theta_2+\mathrm{sh}\,\theta_1\,\mathrm{sh}\,\theta_2$ を示せ (ch, sh の定義はP36 宿題2と同じ)

・ミンコフスキー・ダイヤグラムによる図示(1次元)

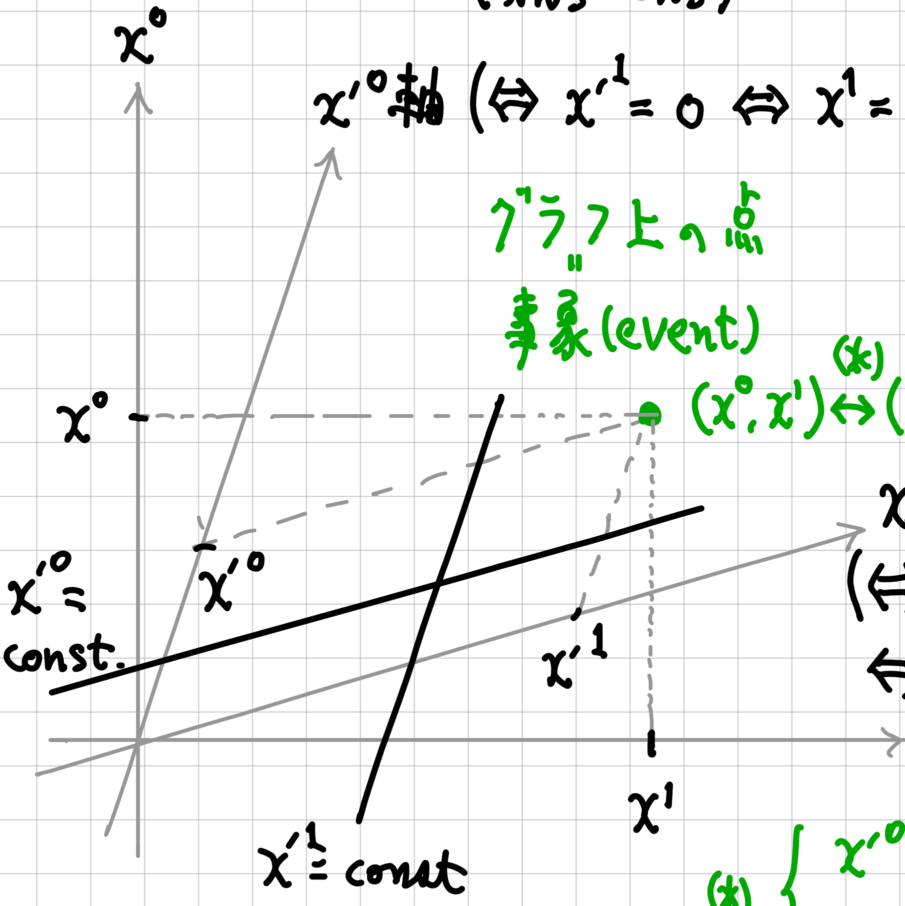
$$(\mathrm{L.B.})\quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\Lambda=\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & -\mathrm{sh}\,\xi \\ -\mathrm{sh}\,\xi & \mathrm{ch}\,\xi \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

$$\beta=\frac{v}{c},\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\tanh\xi := \frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi} = \beta$$

$\left(\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$ のとき $\left.\gamma=2\right)$

光速の約86%



$\overset{(*)}{(x^0,x^1)\leftrightarrow(x'^0,x'^1)}$: 座標値の対応関係

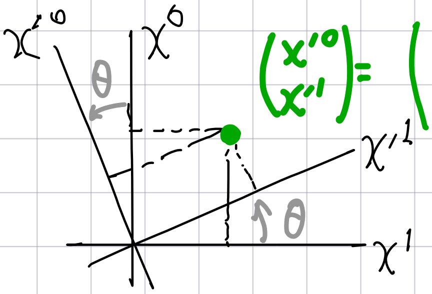
x'^1軸

$(\Leftrightarrow x'^0=0)$

$\Leftrightarrow x^0=\beta x^1$ 傾きβの直線

$$(*)\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0-\beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(-\beta x^0+x^1) \end{cases}$$

cf. ユークリッド空間での角度θの回転



$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$: 座標値の対応関係

x'^1軸 $\Leftrightarrow x'^0=0 \Leftrightarrow \cos\theta\cdot x^0-\sin\theta\cdot x^1=0$

$\Leftrightarrow x^0=\tan\theta\cdot x^1$

〈簡単な帰結〉

(i) 時間の遅れ

$x'^1=0$ に K' の時計があり，時刻 t' を指している

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0-\beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \end{cases} \quad (*)$$

K' 系：$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix}$ とする

これを K 系から見ると $\Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} \overset{ct}{\overset{\parallel}{x^0}} \\ x^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\Lambda^{-1}}_{\begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma \\ +\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' \\ \beta\gamma ct' \end{pmatrix}$$

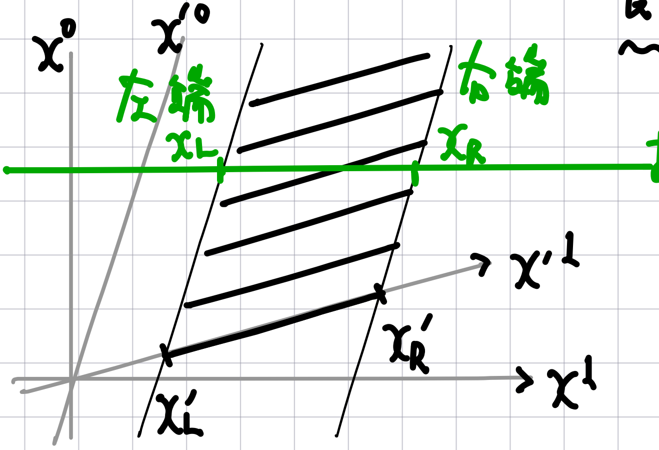
$\therefore t = \gamma t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t'$ ← 1より大！

例えば $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　$t' = 1 \leftrightarrow t = 2$

K' の"1時"は K の"2時"

（K から K' の時計を見ると，ゆっくり進んでいる？）

(ii) 長さの「短縮」



$x^0 \overset{\shortparallel}{=} x_L^0 \overset{\shortparallel}{=} x_R^0$

長さ l の棒が K 系に対して等速運動（左図）

$\Leftrightarrow$ $x_R' - x_L' = l$

(注) 棒の長さとは同じ時刻における両端の座標値の差

K 系での棒の長さは K における同時刻での両端の座標値の差

棒が「縮んだ」 $\Leftrightarrow$ 1より小

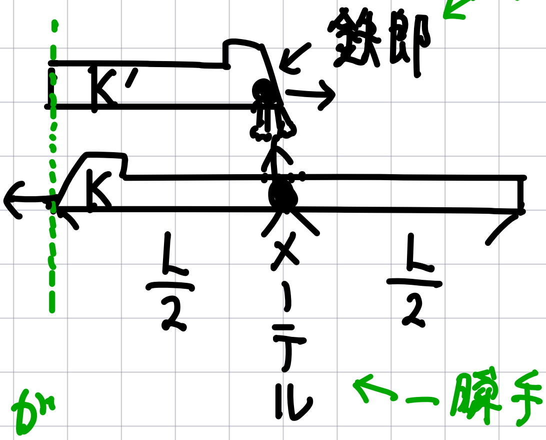
$$\left.\begin{aligned} x_R' &= \gamma(-\beta x_R^0 + x_R) \\ x_L' &= \gamma(-\beta x_L^0 + x_L) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{辺々引くと}} \underbrace{x_R' - x_L'}_{l} = \gamma(x_R - x_L) \quad \therefore x_R - x_L = \frac{1}{\gamma} l$$

($x_R^0 = x_L^0$)

"パラドックス"6.21 (正月の暇つぶし)

同じ長さの銀河鉄道

ずっと手を出している



相対速度 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

(ローレンツ短縮により長さは半分)

←一瞬手渡し

Kの先頭がK'の尾に一致した瞬間にメーテルからイソジンを手渡す作戦 (図の位置でOK!)

と・こ・ろ・が、K'から見るとKの方が縮んでいる(受けとれない??)

問題 10. (特殊相対論のパラドックス：銀河鉄道 999 編) 本問は講義ノート 40 ページのお正月の暇つぶし問題であり，レポート問題ではなく配点はありません！

静止しているときには同じ長さの銀河鉄道 K 号と K' 号が，宇宙空間で正反対の方向に相対速度 $v = (\sqrt{3}/2)c$ で走っているとする (c は光速度)．K 号にはメーテルが乗っていて，K' 号のちょうど先頭に乗っている鉄郎に列車すれ違いの際，イソジンを渡そうと考えている．受け渡しは一瞬で問題なく行われるものとする．(ツッコミはなしでお願いいたします.)

さて，K 号から見ると K' 号はローレンツ短縮を起こして半分の長さになっているので，メーテルは K **号の先端が** K' **号の最後尾に一致した瞬間**に K 号のちょうどど真ん中の位置で，手渡せばよいと考えた．

その旨鉄郎に伝えて，いよいよアンドロメダ星雲にてすれ違いのときがやってきた．メーテルは K 号のど真ん中で上記 (太字) の時刻にアビガンを瞬間差し出しするつもりでいる．鉄郎はいつでも受け取れるよう受け手をずっと窓から差し出している．ところがハッと鉄郎は思った．K' 号から見れば K 号がローレンツ短縮を起こして半分の長さになっているので，これだと受け取れない！

果たしてイソジンは無事手渡せたであろうか？ミンコフスキー・ダイヤグラムを用いて説明せよ．メーテル・鉄郎の軌跡 (世界線) および問題文の**太字の事象**をダイヤグラム内に明記せよ．(2 人それぞれの座標系を基準としてダイヤグラムを書き，どちらから見ても結果に矛盾がないことを確かめよ．なおイソジンだけは受け渡ししてはダメだと思われる人は他の物品に変更して本問を解いても構わない．過去問では「みかん」「ドリアン」「赤福」「アビガン」が受け渡しされた実績がある．)