§6 特殊相対性理論

'21 12/20

この section は再び古典論(力学&電磁気学)

6.1 電磁場の古典論

4次元時空 $(t, \vec{x})$ を考える
時間 空間

電荷・電流の源以外、物質がない(真空)

法則6.1 (「真空中の」マクスウェルの方程式) [ガウス単位系]

電場 $\vec{E}(t,\vec{x})$ と 磁場 $\vec{B}(t,\vec{x})$ に関する基本法則
「磁束密度」in [SI単位系]

$$
(M)\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho & \cdots ① \\
\nabla\cdot\vec{B} = 0 & \cdots ② \\
\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \cdots ③ \\
\nabla\times\vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \cdots ④
\end{cases}
$$

$\rho(t,\vec{x})$: 電荷密度

$\vec{j}(t,\vec{x})$: 電流密度

$c \fallingdotseq 3.0\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$ (光速度)
$= \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

注6.2 ・物質中ではもう少し複雑 ・$\vec{E}$と$\vec{B}$は対称的
・単位系を変えると係数・呼び名が変わる([SI単位系]など)

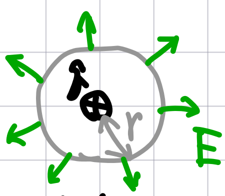
命題6.3

$$
\begin{cases}
② : \nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow {}^{\exists}\vec{A}(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\
③ : \nabla\times\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow {}^{\exists}\phi(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}
\end{cases}
$$

∵ ポアンカレの補題(ただし領域の単連結性は仮定) ▨

注6.4 (物理的意味)

①: ガウスの法則 $E = k\dfrac{q}{r^2}$



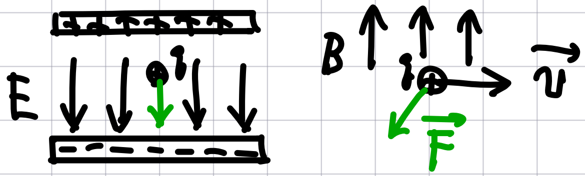
②: モノポール(N極 or S極のみ)の非存在

③: ファラデーの電磁誘導の法則 etc.

④: ビオ・サバールの法則 etc.

<u>法則6.5</u>（荷電粒子qが背景電磁場から受ける力）

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) \cdots ⑤$$ ローレンツ力



6.2 方程式の対称性（方程式を不変に保つ座標変換）

(N) ニュートンの運動方程式 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ ←t微分

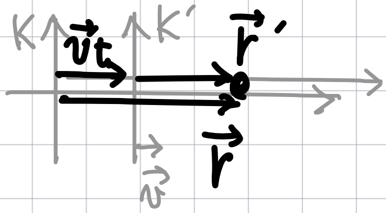
Galilei Boost (G.B.)

<u>定義6.6</u>（ガリレイ変換）:=（3次元回転）⑥ +（ガリレイ・ブースト）⑦ +（平行移動）⑧

$\vec{r}' = R(\theta)\vec{r}$ ⑥　　$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t\ (\text{絶対時間}) \end{cases}$ ⑦　　$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$ ⑧

広義には（3次元直交変換）
回転&折り返し

直観的な慣性系間の座標変換



<u>定理6.7</u> ガリレイ変換の下、mが不変で、

$\vec{F}$が⑦・⑧で不変&⑥で$\vec{r}$と同じ変換性をもつ ⇒ (N)は不変

∵ G.B.: $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$,　回転: $m\ddot{\vec{r}}' - \vec{F}' = R(\theta)(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}) = \vec{0}$ ∎

<u>命題6.8</u> ガリレイ変換全体は群をなす（ガリレイ変換群）

(M) マクスウェルの方程式（少し特別な状況で考察）

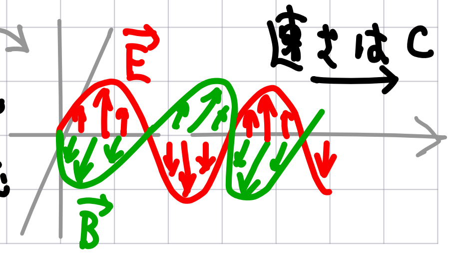
<u>命題6.9</u> $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$のとき、$\vec{E}$と$\vec{B}$は波動方程式をみたす

(W) $(-\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)\vec{E} = \vec{0}$ or $\vec{B}$　　この解を電磁波（光）という

$\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$,

$x^0 := ct$, $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$

③: $\dot{\vec{B}} \rightsquigarrow \vec{E}$を生む
④: $\dot{\vec{E}} \rightsquigarrow \vec{B}$を生む



☹ 宿題1 これを示せ（$\vec{E}$ or $\vec{B}$ どちらか） $\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \Delta\vec{v}$ を用いてよい

簡単のため空間1次元で考える

命題 6.10 1次元波動 eq. $\underbrace{(\partial_0^2 - \partial_1^2)}_{= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}} f(x^0, x^1) = 0$ は以下の変換の下、不変

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\theta & \mathrm{sh}\theta \\ \mathrm{sh}\theta & \mathrm{ch}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

ch:= cosh　sh:= sinh

☹ $\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta = 1$ と連鎖律 ▨

cf. 1次元ラプラス eq. $(\partial_0^2 + \partial_1^2) f(x^0, x^1) = 0$ は以下の変換の下不変

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

☹ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$　〃　▨

定義 6.11 (ローレンツ変換) = (3次元回転) + (ローレンツ・ブースト)

↑広義には (3次元直交変換)

Lorentz Boost (L.B.)

$$(\mathrm{L.B.}) \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\shortparallel} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$\beta := \frac{v}{c}, \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

注 6.12

- $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\xi & -\mathrm{sh}\xi \\ -\mathrm{sh}\xi & \mathrm{ch}\xi \end{pmatrix}$ と書ける $(\mathrm{ch}\xi = \gamma, \mathrm{sh}\xi = \beta\gamma, \tanh\xi = \beta)$
- $\beta = \frac{v}{c} \to 0$ で (L.B.) → (G.B.)

定理 6.13 (M) はローレンツ変換の下、不変

☹ レポート & 後日 ▨

命題 6.14 ローレンツ変換全体は群をなす

注 6.15

- (W) はガリレイ変換で形が変わる
- (N) はローレンツ変換　〃

宿題2 双曲線関数

$\mathrm{ch}\,\theta := \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$, $\mathrm{sh}\,\theta := \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$

について以下を証明せよ：

- $\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta = 1$
- $\mathrm{sh}(i\theta) = i\sin\theta$

まとめ	古典力学	電磁気学
ガリレイ変換	不変	×
ローレンツ変換	×	不変