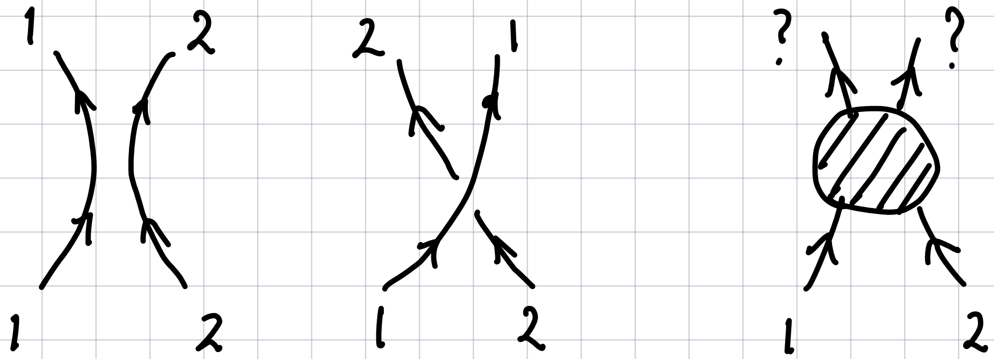
§5 ボゾンとフェルミオン

5.1 同種粒子

定義5.1 2個の粒子が同種粒子である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ それらの質量・スピン・電荷などの粒子固有の物理量が同じである

仮説5.2 量子論では同種粒子は識別できない



古典論（それぞれの軌道を追跡可能）　　量子論（確率解釈→追跡不可能）

N個の同種粒子からなるシステムを考える：

$$\psi(q_1, q_2, \cdots, q_N; t) \qquad q_k := (\vec{r}_k, m_k)$$

スピンのz成分（+ or − など）

位置・スピン表示

2粒子の入れ替え op.（Hと可換）

$$P_{kl}\psi(\cdots q_k \cdots q_l \cdots; t) := \psi(\cdots q_l \cdots q_k \cdots; t)$$

$$\overset{5.2}{=} \underbrace{c_{kl}}_{\text{定数}}\psi(\cdots q_k \cdots q_l \cdots; t)$$

$$P_{kl}^2 = id \Rightarrow c_{kl}^2 = 1 \Rightarrow c_{kl} = \pm 1$$

定義5.3 $\forall k, l$ に対して，$c_{kl} = +1$（対称）$\Rightarrow$ Bose粒子（ボゾン）という
$= -1$（反対称）$\Rightarrow$ Fermi粒子（フェルミオン）

注5.4 実は

ボソン ⇔ スピン 0 or 1 or 2 (整数)

フェルミオン ⇔ 〃 $\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$ (半奇数)

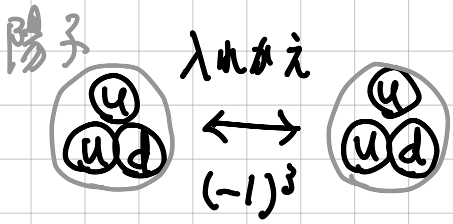
例5.5 素粒子

(B) スピン0 : Higgs粒子

(F) スピン$\frac{1}{2}$: クォーク, 反クォーク, レプトン(電子e^-, ミューオン, ニュートリノ, …)
反レプトン(陽電子e^+, …)

(B) $\begin{cases} \text{スピン1 : 光子, W・Zボソン, グルーオン} \\ \text{スピン2 : 重力子} \end{cases}$

例5.6 複合粒子



陽子 $p = uud$: (F)

中性子 $n = udd$: (F)

4ヘリウム $^4He = \overbrace{ppnn}^{4コ} + 2e^-$: (B)

3ヘリウム $^3He = \overbrace{ppn}^{3コ} + 2e^-$: (F)

電荷

u : アップクォーク $(+\frac{2}{3})$

d : ダウン 〃 $(-\frac{1}{3})$

宿題1 重水素原子^2Hおよびパイ中間子πはボソンかフェルミオンか? (構成要素を記載すること)

命題5.7 N個のボソン, フェルミオンの波動関数は以下のようにそれぞれ対称関数, 反対称関数で記述される:

← Sch. eq の解

$$\psi_B(q_1, \cdots, q_N; t) = \frac{C_B}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \psi(q_{\sigma(1)}, \cdots, q_{\sigma(N)}; t)$$

☺ レポート?

$$\psi_F(\quad 〃 \quad) = \frac{C_F}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \psi(q_{\sigma(1)}, \cdots, q_{\sigma(N)}; t)$$

5.2 独立粒子近似

N粒子間の相互作用を無視する近似で定常状態を考える.

$$H\varphi = \sum_{k=1}^{N}\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_k + V(q_i)\right)}_{H_k\ (=1\otimes\cdots\otimes H_k\otimes\cdots\otimes 1)}\varphi = E\varphi \quad \cdots (*)$$

共通

k番目

それぞれの粒子:

$$H_k\,\varphi_{n_k}(q_k) = E_{n_k}\varphi_{n_k}(q_k) \qquad k\in\{1,\cdots,N\}$$

量子数を1種類のラベルで表記

$\hat{q}_1,\hat{p}_1$ $\quad$ $\hat{q}_N,\hat{p}_N$

$\mathcal{H}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}$

正確には $\otimes$

$(*)$の解 $\varphi_{n_1\cdots n_N}(q_1,\cdots,q_N) = \varphi_{n_1}(q_1)\cdot\varphi_{n_2}(q_2)\cdots\varphi_{n_N}(q_N)$

$E = E_{n_1}+\cdots+E_{n_N}$

宿題2 $N=3$の場合の$\varphi^{(B)}$を書き下し, $q_1\leftrightarrow q_2$の入れかえで不変であることを確認せよ

$\mathrm{Sym}_N(\mathcal{H})$: 対称代数

命題5.8 以上の設定にて

$$\varphi^{(B)}_{n_1\cdots n_N}(q_1,\cdots,q_N) = \frac{C_B}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\varphi_{n_1}(q_{\sigma(1)})\cdots\varphi_{n_N}(q_{\sigma(N)})$$

$\bigwedge^N(\mathcal{H})$: 外積代数

$$\varphi^{(F)}_{n_1\cdots n_N}(q_1,\cdots,q_N) = \frac{C_F}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\varphi_{n_1}(q_{\sigma(1)})\cdots\varphi_{n_N}(q_{\sigma(N)})$$

$$\overset{\text{規格化}}{=}\frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix}\varphi_{n_1}(q_1) & \varphi_{n_1}(q_2) & \cdots & \varphi_{n_1}(q_N)\\ \varphi_{n_2}(q_1) & \varphi_{n_2}(q_2) & \cdots & \varphi_{n_2}(q_N)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n_N}(q_1) & \varphi_{n_N}(q_2) & \cdots & \varphi_{n_N}(q_N)\end{vmatrix} : \text{Slater行列式}$$

☺ レポート

$n_k = n_\ell$ ⇓ 行列式 $=0$

注5.9

(i) フェルミオンは同一状態に2個以上入れない(Pauliの排他律)

(ii) ボゾンは 〃 いくらでも入れる

cf. ボーズ・アインシュタイン凝縮(BEC) ⇝ 超伝導(eのクーパー対)など低温物理の理解の鍵