3.2 ポテンシャル障壁による散乱問題

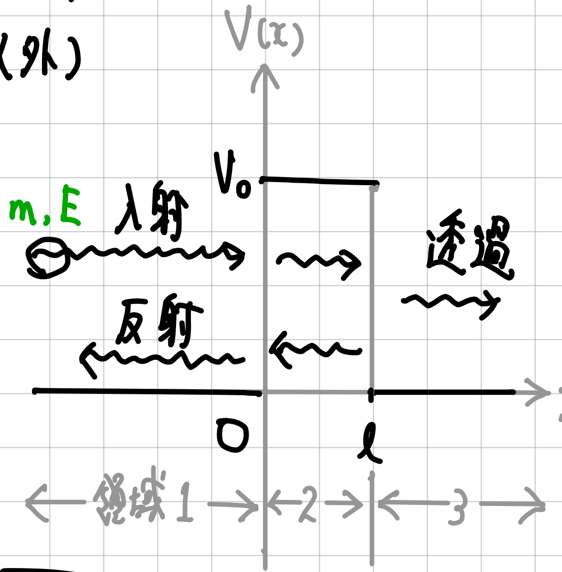
'21 11/1

例3.6

$$V(x) = \begin{cases} V_0\ (>0) & (0 \leqq x \leqq \ell) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

このポテンシャル障壁に $x=-\infty$ から自由粒子 (m, E) が入射

（m：質量、E：エネルギー (given)）



(i) $E > V_0$ のとき

例3.3 より

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ \varphi_2(x) = F e^{i\alpha x} + G e^{-i\alpha x} \\ \varphi_3(x) = C e^{ikx} \end{cases} \qquad k := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \alpha := \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

宿題1　$\frac{C}{A}$ の式を計算して導け

命題3.4 の b.c. (=boundary condition) より

$$x=0: \quad A+B = F+G, \quad ik(A-B) = i\alpha(F-G)$$

$$x=\ell: \quad Ce^{ik\ell} = Fe^{i\alpha\ell} + Ge^{-i\alpha\ell}, \quad ikCe^{ik\ell} = i\alpha(Fe^{i\alpha\ell} - Ge^{-i\alpha\ell})$$

$$\therefore \frac{B}{A} = \frac{(k^2-\alpha^2)(1-e^{2i\alpha\ell})}{(k+\alpha)^2-(k-\alpha)^2e^{2i\alpha\ell}}, \quad \frac{C}{A} = \frac{4k\alpha\, e^{i(\alpha-k)\ell}}{(k+\alpha)^2-(k-\alpha)^2e^{2i\alpha\ell}}$$

方程式4コ
未知変数5コ

$$\therefore (*) \begin{cases} \text{反射率} := \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(1 + \frac{4(k\alpha)^2}{(k^2-\alpha^2)\sin^2\alpha\ell}\right)^{-1} \\ \text{透過率} := \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \left(1 + \frac{(k^2-\alpha^2)\sin^2\alpha\ell}{4(k\alpha)^2}\right)^{-1} \end{cases}$$

和 = 1

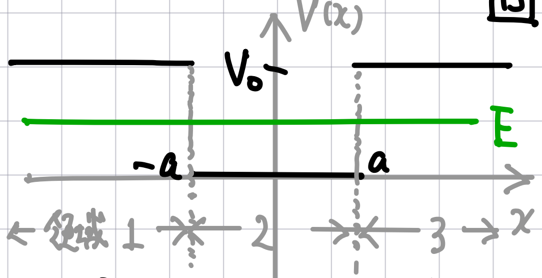
※ $\alpha\ell = n\pi$ で $(n=1,2,3,\cdots)$
$\left|\frac{B}{A}\right|^2 = 0, \left|\frac{C}{A}\right|^2 = 1$
(完全透過)

(ii) $E < V_0$ のとき

$\beta := \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$ とおいて、(*) の $\alpha \mapsto i\beta$ とおきかえればよい

$\left(\left|\frac{C}{A}\right|^2 \neq 0 :\right.$ トンネル効果!$\left.\right)$

3.3 井戸型ポテンシャルによる束縛状態



例 3.7 $V(x) = \begin{cases} 0 & : |x| \leqq a \\ V_0 (>0) & : |x| > a \end{cases}$

に エネルギー E ($0 < E < V_0$) の粒子が束縛されている。(固有値問題を解く)

$V(-x) = V(x)$ より、波動関数 $\varphi(x)$：偶 or 奇 (3.5 (ii))

(i) $\varphi(x)$ が偶関数のとき

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = Be^{\beta x} + \cancel{B'}e^{-\beta x} \\ \varphi_2(x) = A\cos\alpha x \\ \varphi_3(x) = Be^{-\beta x} + \cancel{B'}e^{\beta x} \end{cases}$$

← 不適 (∵ 束縛 ⇔ 2乗可積分 ⇒ $|\varphi(x)| \xrightarrow{x \to \pm\infty} 0$)

$\alpha := \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\beta := \dfrac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

$x = \pm a$ での b.c.：

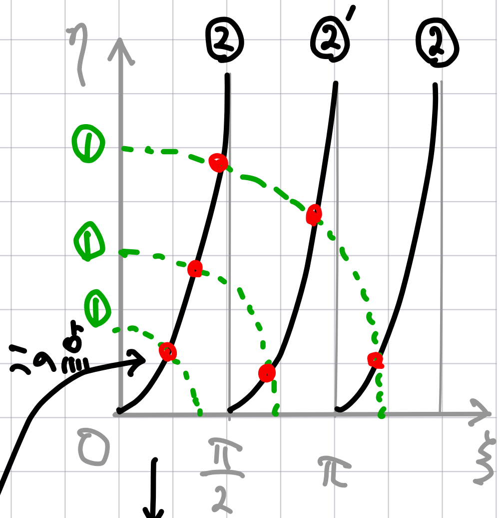
$$Be^{-\beta a} = A\cos\alpha a, \quad B\beta e^{-\beta a} = A\alpha\sin\alpha a$$

A, B & E! 式3つ, 未知変数3つ!

規格化条件：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$

$\xi := \alpha a \,(>0)$, $\eta := \beta a \,(>0)$ とすると

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \cdots ①, \quad \eta = \xi\tan\xi \cdots ③$$



↓ 交点の値から、α, β (つまり E) が定まる。(離散的)

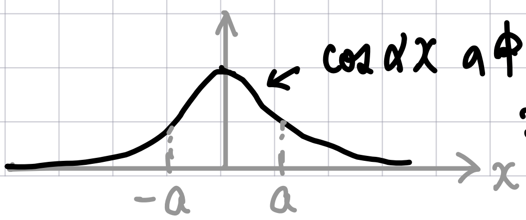
(交点なし ⇔ 解なし)

(ii) $\varphi(x)$ が奇関数のとき (詳しくはLポート)

同様に ① & $\eta = -\xi\cot\xi \cdots ②'$

エネルギー固有値最小 ⇔ α が最小 (交点の ξ の値が最小)

このときの $\varphi(x)$ の概形：



← $\cos\alpha x$ の中で α 最小 かつ $x = \pm a$ でなめらかに指数関数に接続

3.4 調和振動子

Diracの記法で代数的に解く（固有値問題を解きエネルギー準位を求める）
固有値

$$\hat{H}(\hat{x},\hat{p}) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

まず次のops.をdef：

エルミート共役

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

$\hat{H}$の固有値問題 $\Leftrightarrow$ $\hat{N} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$の固有値問題

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \Rightarrow [\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$$

また、$[\hat{N},\hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ …①

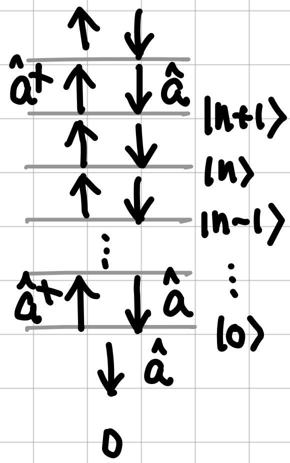
$[\hat{N},\hat{a}] = -\hat{a}$ …②

宿題2 これを示せ
（$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$ を用いてよい）

$\hat{N}$の固有状態を$|n\rangle$，固有値をλ_nとする：$\hat{N}|n\rangle = \lambda_n|n\rangle$

このとき、
$$\begin{cases} \hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle \overset{①}{=} (\hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger)|n\rangle = (\lambda_n + 1)\hat{a}^\dagger|n\rangle \\ \hat{N}\hat{a}|n\rangle \overset{②}{=} (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|n\rangle = (\lambda_n - 1)\hat{a}|n\rangle \end{cases}$$

よって $\hat{a}^\dagger|n\rangle$，$\hat{a}|n\rangle$ も $\hat{N}$の固有状態．



一方、$\langle n|\hat{N}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = |\hat{a}|n\rangle|^2 \geq 0$

$\lambda_n \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1}$ （規格化可能とする）

よってあるnで $\hat{a}|n\rangle = 0$ とならなければならない

これを$|0\rangle$と書くと、

$\lambda_0 = \langle 0|\hat{N}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0$ より

$\lambda_n \in \{0,1,2,\cdots\}$ が言える．$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

- $\hat{N}$: number op. という
- $\hat{a}^\dagger$: creation op.
- $\hat{a}$: annihilation op.