2.2 正準交換関係と不確定性原理

'21 10/18

定義2.13 (x^i, p_i) を古典力学での粒子の正準変数(位置, 運動量)とする.

← $i=1,2,3$ (x,y,z成分)

これらを、以下をみたすように $\mathcal{H}$ 上の ops. $\hat{x}, \hat{p}$ におきかえる操作を正準量子化という.

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta^i_j,\quad [\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0,\quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

正準交換関係(Canonical Commutation Relation = CCR)と呼ぶ

(基本ポアソン括弧 $\{x^i, p_j\}_{P.B.} = 1$ 等において、$\{\ ,\ \}_{P.B} \to \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$ とおきかえたもの)

以後 簡単のため空間1次元で考える

例2.14 (CCRの例)

「A表示」 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\hat{A}$ を対角化する表示

(i) $\hat{x} = x,\ \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ (x表示)
(Schrödinger量子化)

$^\exists\{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{R}}$ 完全系 s.t. $\begin{cases} \hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \\ \hat{p}|x\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}|x\rangle \end{cases}$

(ii) $\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p},\ \hat{p} = p$ (p表示)

$^\exists\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$ s.t. $\begin{cases} \hat{x}|p\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}|p\rangle \\ \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \end{cases}$

定義2.15 $\Lambda = \mathbb{R}$ のとき

$|\varphi_\lambda\rangle$ を $|\lambda\rangle$ と書いている

- 正規直交系 $\Leftrightarrow$ $\langle\lambda|\lambda'\rangle = \delta(\lambda - \lambda')$
- 〃 が完全系 $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, |\lambda\rangle\langle\lambda| = 1_{\mathcal{H}}$

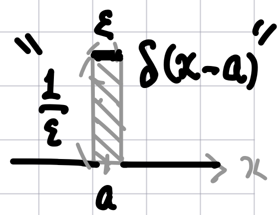
cf. Gelfandの3つ組

$(\Omega, \mathcal{H}, \Omega')$

$\uparrow$ $\mathcal{H}$より小さい　　$\in$ $|x\rangle$

定義2.16 (Diracのデルタ関数)

以下をみたす汎関数 $\delta: f \mapsto f(a)$ を delta-fcn. と呼ぶ

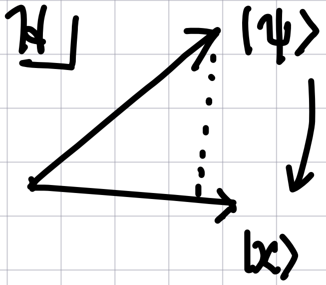


$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx = 1,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)\quad (a\in\mathbb{R})$$

$f(x)$: test fcn.

命題2.17 $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk$

注2.17 $\{|x\rangle\}$ について



位置を測定

遷移(注2.8)

(遷移確率) $|\psi\rangle = \text{"}\sum\text{"}\, C_x |x\rangle$

$$\| $$

$$|C_x|^2 = |\underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)}|^2 = |\psi(x)|^2$$

Bornの確率解釈

$$\langle \psi|\psi\rangle = \int dx\, \overline{\psi(x)}\, \psi(x) = \underbrace{\int dx}\, \langle\psi|x\rangle \underbrace{\langle x|\psi\rangle}$$

標準的内積

$\langle\psi| = \text{"}\sum_x\text{"} \langle x|\, \overline{C_x}$

$$\int dx\, |x\rangle\langle x| = 1$$

$$\forall \psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int dx'\, \underbrace{\langle x|x'\rangle}_{\delta(x-x')} \underbrace{\langle x'|\psi\rangle}_{\psi(x')}$$

↑完全系　　となるべし

注2.18 $|x\rangle \to |p\rangle$ の基底変換

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int dp\, \underbrace{\langle x|p\rangle}_{?} \underbrace{\langle p|\psi\rangle}_{\psi(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, e^{\frac{ipx}{\hbar}} \psi(p)$$

↑pの完全系

Fourier変換!

一方

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \langle x|p\rangle$$

$$\| $$

$$p\langle x|p\rangle \longrightarrow p(x) = A e^{\frac{ipx}{\hbar}}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

U(1)因子の不定性 $e^{i\theta}$ (注2.9) は $e^{i\theta}=1$ とした

宿題1　$A = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ を示せ

(ヒント) $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$

↑xの完全系をはさむ

$\|$　$\delta(x) = \delta(-x)$ にも注意 (2.17を用いてよい)

$2\pi\hbar |A|^2 \delta(p'-p)$ となるはず

命題2.19 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$: エルミート ops. が $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ をみたすとき

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{\langle\hat{C}\rangle^2}{4}$$ (Robertsonの不等式) $\left(\Delta\hat{F} := \hat{F} - \langle\hat{F}\rangle\right)$

☺ $I(\alpha) := \langle{}^\forall\psi|\underbrace{(\alpha\Delta\hat{A} - i\Delta\hat{B})(\alpha\Delta\hat{A} + i\Delta\hat{B})}_{(\Delta\hat{A})^2\alpha^2 + i[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\alpha + (\Delta\hat{B})^2}|\psi\rangle = \left|(\alpha\Delta\hat{A} + i\Delta\hat{B})|\psi\rangle\right|^2 \geq 0$

$(\alpha \in \mathbb{R})$ 実数値

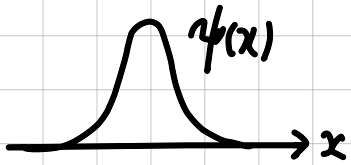
$$= \langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\alpha^2 - \langle\hat{C}\rangle\alpha + \langle(\Delta\hat{B})\rangle^2$$ 判別式 ≤ 0 ⇒ 与式 ■

(等号成立 ⇒ $\alpha = \dfrac{\langle\hat{C}\rangle}{2\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle}$)

系2.20 $\hat{A} = \hat{x}, \hat{B} = \hat{p}, \hat{C} = \hbar$ で

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$ (Heisenbergの不確定性原理) $\left(\Delta F := \sqrt{\langle(\Delta\hat{F})^2\rangle}\right)$

注2.21 等号成立 ⇔ Gaussian(波束)



$\left(\langle\hat{x}\rangle = 0, \langle\hat{p}\rangle = 0 \text{ なら } \psi(x) = A e^{-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2}}\right)$

$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ から A が決まる

☺ このときを考える.

$$\alpha = \frac{\hbar}{2(\Delta x)^2} \ \& \ (\alpha\Delta\hat{x} + i\Delta\hat{p})|\psi\rangle = 0$$

$\langle x| \to$ ⇓

$$\langle x|(\alpha\underbrace{\Delta\hat{x}}_{\hat{x} - \underbrace{\langle\hat{x}\rangle}_{0}} + i\underbrace{\Delta\hat{p}}_{\hat{p} - \underbrace{\langle\hat{p}\rangle}_{0}})|\psi\rangle \Rightarrow \left(\alpha x + \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = 0$$ ■

x, $\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$

宿題2 $\langle\hat{x}\rangle = 0, \langle\hat{p}\rangle = 0$ のとき $\psi(p)$ を求めよ (Δpを用いること. 振幅Aは求めなくてよい)