'20 7/17

3.4 物理法則の相対論的定式化

座標変換 $x' = \Lambda x$ …(*) で良いふるまいをする量を def したい

定義 3.17 (*)の下

νについて和

$$v'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu}$$ と変換する量を反変 vector

$$v'_{\mu} = ({}^t\Lambda^{-1})_{\mu}{}^{\nu} v_{\nu}$$ 〃 共変 vector

$$\left(= v_{\nu} (\Lambda^{-1})_{\nu}{}^{\mu}\right)$$

x^{μ}と同じ変換性 という 双対

行列 Λ 上つき(反変成分) 下つき(共変成分)

例 3.18

$$\begin{cases} dx^{\mu} : \text{反変 vector} \\ \partial_{\mu} := \dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}} : \text{共変 vector} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V \ni \text{接 vector} = X = X^{\mu}\partial_{\mu} \\ V^{\dagger} \ni \text{余接 vector} = \omega = \omega_{\mu} dx^{\mu} \end{cases}$$ 双対

(ベクトル場)

(1-form)

X, ω が座標のとり方によらない $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} X^{\mu} : \text{反変} \\ \omega_{\mu} : \text{共変} \end{cases}$

∵ $(\text{共変})_{\mu}(\text{反変})^{\mu} \xmapsto{(*)} (\text{共変})_{\nu} \underbrace{(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho}}_{\delta^{\nu}{}_{\rho}} (\text{反変})^{\rho} = (\text{共変})_{\mu}(\text{反変})^{\mu}$ ■

〈Vと$V^{\dagger}$の関係をVの内積を用いて議論〉

まず $V = (\mathbb{R}^n, \langle\,|\,\rangle)$ とする

$$x = \underset{\text{基底}}{e_i} \underset{\text{成分}}{x^i}$$

$(\cdots)\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$

$g_{ij} := \langle e_i | e_j \rangle$ を計量(metric)と呼ぶ　(対称 $g_{ij} = g_{ji}$)

双対空間 $V^\dagger$ を $V^\dagger := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ として構成 ← V上の一次形式(線形写像 $V \to \mathbb{R}$)

$f^i \in V^\dagger$ を $f^i(e_k) = \delta^i{}_k$ で定めたい

$$f^i(e_k) := \langle (g^{-1})^{ij} e_j \,|\, e_k \rangle = (g^{-1})^{ij} \overbrace{\langle e_j | e_k \rangle}^{g_{jk}} = \delta^i{}_k \text{ でOK}$$

<u>Fact</u> $V^\dagger = \langle \underbrace{f^1, \cdots, f^n}_{\text{双対基底}} \rangle_{\mathbb{R}}$, $(V^\dagger)^\dagger \simeq V$

$$\langle f^i | f^j \rangle := \langle (g^{-1})^{ik} e_k \,|\, (g^{-1})^{jl} e_l \rangle = (g^{-1})^{ik} \overbrace{(g^{-1})^{jl} g_{kl}}^{\delta^j{}_k} = (g^{-1})^{ij}$$

$V^\dagger$ の内積

※以後 $g^{ij} := (g^{-1})^{ij}$ と略記 $(g^{ik} g_{kj} = \delta^i{}_j)$

Vの基底変換を考える

$$e_i' = e_j (R^{-1})^j{}_i \quad (= \underline{({}^tR^{-1})}_i{}^j e_j)$$

$$x = e_i' x'^i = e_j (R^{-1})^j{}_i x'^i = e_j x^j \quad \therefore x'^i = \underline{R^i{}_j} x^j$$

$V^\dagger$ では $f'^i = g'^{ij} e_j' = R^i{}_k \underbrace{R^j{}_l g^{kl} e_m (R^{-1})^m{}_j}_{\delta_l{}^m} = \underline{R^i{}_k} \overbrace{g^{kl} e_l}^{f^k}$

↑ 両辺$^{-1}$

$$g'_{ij} = \langle e_i' | e_j' \rangle = g_{kl} (R^{-1})^k{}_i (R^{-1})^l{}_j$$

$x^\dagger = x_i f^i$ と表したとき $x_i' = x_i (R^{-1})^j{}_i = \underline{({}^tR^{-1})}_i{}^j x_j$

内積を不変に保つ変換 $(g_{ij}' = g_{ij})$ を考える.

$$\langle x | y \rangle = \langle e_i x^i | e_j y^j \rangle = x^i g_{ij} y^j = x'^i g'_{ij} y'^j = {}^tx\, g\, y$$

$$= R^i{}_k x^k g_{ij}' R^j{}_l y^l = x^k \underbrace{({}^tR)_k{}^i g'_{ij} R^j{}_l}_{= g_{kl}} y^l = {}^tx\, {}^tR g' R y$$

e_i : 正規直交基底

$\Rightarrow g_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow {}^tR R = 1$ (直交行列) 注 ${}^tR = R^{-1}$ より"共変=反変"

・ここから $V = (\mathbb{R}^{1,3}, \text{"}\langle\,|\,\rangle\text{"})$ に戻る　　$(x^0 \equiv ct)$

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad : \text{ローレンツ不変} \quad (3.15)$$

$$= {}^t x \eta x \xmapsto{(*)} {}^t x \underbrace{{}^t\Lambda \eta \Lambda}_{\eta} x \qquad \eta := \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

正定値性なし

← これをみたす Λ 全体 = 広義ローレンツ群

定義3.19 座標変換が広義ローレンツ群に従い、計量 $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ をもつ4次元空間をミンコフスキー空間という

注3.20 $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-x_0, x_1, x_2, x_3)$

添字の上げ下げ　時間成分の上げ下げで符号が出る

定義3.21 (tensor)

$\overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{p} \otimes \overbrace{V^\dagger \otimes \cdots \otimes V^\dagger}^{q}$ tensor積

座標変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ で以下のように変換する量 $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ を

p 階反変 q 階共変 ((p,q) 型) tensor という.

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p} ({}^t\Lambda^{-1})_{\nu_1}{}^{\sigma_1} \cdots ({}^t\Lambda^{-1})_{\nu_q}{}^{\sigma_q} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q}$$

特に $p = q = 0$ のとき T は scalar といい, $T' = T$

〈tensorの演算〉 (詳しくは [風] 5章)　　cf. [横沼]

(i) 添字の上げ下げ (共変 ⇔ 反変)　例 $\eta_{\mu\nu} A^\nu{}_\rho = A_{\mu\rho}$

(ii) 添字の縮約　例 $A^{\mu\nu}{}_\nu = B^\mu$, $A^\mu B_\mu = C$　← $V^\dagger, V$ 間で Tr がとられている

$V \otimes V^\dagger \simeq \mathrm{Hom}(V, V)$

(iii) tensorの微分　例 $\partial_\mu A(x) = B_\mu(x)$

$(\partial^\mu := \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$: 反変$)$

例3.22 (Lorentz scalar)

物体とともに動く時計の示す時間

$(c\,d\tau)^2 = -dx_\mu dx^\mu = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$

(i) $s^2 = x_\mu x^\mu = -(ct)^2 + \vec{x}^2$

(ii) 無限小の固有時間間隔 $d\tau := \frac{1}{c}\sqrt{dx_\mu dx^\mu} = dt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma}dt$

$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$

(iii) $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ $\quad (|\det\Lambda| = 1)$

(iv) $\Box := \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_0^2 + \partial_{\vec{x}}^2$ (cf. P31 (W))

例3.23 (Lorentz vector)

時間成分 空間成分

(i) 4元速度 $u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} \left(= \gamma(c, \vec{v})\right)$ …①

$u_\mu u^\mu = -\gamma^2(c^2 - v^2) = -c^2$ (一定) …②

(ii) 4元運動量 $p^\mu := m u^\mu \overset{①}{=} (\underbrace{m\gamma c}_{p^0}, \underbrace{m\gamma\vec{v}}_{\vec{p}}) =: \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ …③

$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \overset{\beta=0}{=} \underbrace{mc^2}_{\text{静止エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{非相対論的運動エネルギー}} + O(\beta^2)$ ← これを示せ(課題)

②×m^2 & ③: $p_\mu p^\mu = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^{\,2} = -m^2c^2$ …④

$\therefore\ E^2 = (c\vec{p})^2 + (mc^2)^2$ …⑤ (← $m=0$ のときも実は正しく $E = c|\vec{p}|$)

定理3.24 (tensor) = 0 の式はローレンツ不変

- Maxwell eq. : レポート13 & form は大域的 ⇒ $F_{\mu\nu}, A_\mu, j_\mu$: tensor
- 相対論的運動方程式 (ミンコフスキー eq.) ← 0成分: $\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$ (仕事率)

$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \underset{\text{4元力}}{K^\mu} := \left(\frac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{f}, \gamma\vec{f}\right) \xrightarrow{\beta=0\text{で}} \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{f}$: Newton's EOM

cf. [山・中] II巻 P561