§3 物理法則と時空の対称性

このsectionは再び古典論(力学&電磁気学)

3.1 電磁場の古典論

4次元時空 $(t, \vec{x})$ を考える
　　　　　時間　空間

← 電荷・電流の源以外、物質がない(真空)

法則3.1 (「真空中の」マクスウェルの方程式) [ガウス単位系]

電場 $\vec{E}(t,\vec{x})$ と 磁場 $\vec{B}(t,\vec{x})$ に関する基本法則　(cf. 配付プリント)

「磁束密度」in [SI単位系]

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho \quad \cdots ①$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \cdots ②$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \cdots ③$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \cdots ④$$

$\rho(t,\vec{x})$: 電荷密度

$\vec{j}(t,\vec{x})$: 電流密度

$c \fallingdotseq 3.0\times 10^8\ \mathrm{m/s}$ (光速度)
$\quad = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

注3.2
・物質中ではもう少し複雑
・単位系を変えると係数・呼び名が変わる([SI単位系]など)

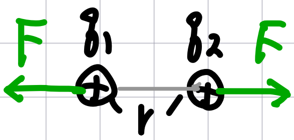
命題3.3

$$\begin{cases} ②: \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \Rightarrow {}^\exists \vec{A}(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \\ ③: \mathrm{rot}\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow {}^\exists \phi(t,\vec{x}) \text{ s.t. } \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

∵ ポアンカレの補題(ただし領域の単連結性は仮定)

注3.4 (物理的意味)

①: クーロンの法則 $F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$



②: モノポール(N極 or S極のみ)の非存在

③: ファラデーの電磁誘導の法則 etc.

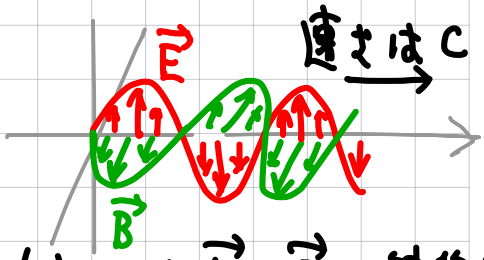
④: ビオ・サバールの法則 etc.

命題3.5 $\rho=0,\ \vec{j}=\vec{0}$ のとき、$\vec{E}$と$\vec{B}$は波動方程式をみたす

$$(-\partial_0^2+\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)\,\vec{E}=\vec{0}$$
$$\vec{B}$$

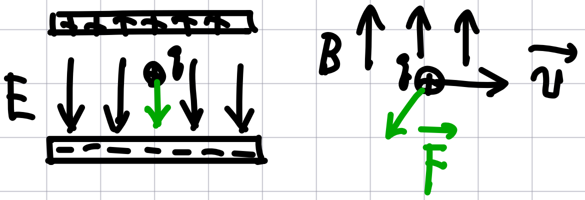
この解を電磁波(光)という

$$x^0:=ct,\quad \partial_\mu:=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\quad(\mu=0,1,2,3)$$



法則3.6 (荷電粒子qが背景電磁場から受ける力)

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdots⑤\quad\text{ローレンツ力}$$



※ $\vec{E}$と$\vec{B}$は対称的
($\vec{E}\to-\vec{B},\ \vec{B}\to-\vec{E}$で不変)

③: $\dot{\vec{B}}\rightsquigarrow\vec{E}$を生む

④: $\dot{\vec{E}}\rightsquigarrow\vec{B}$を生む

3.2 方程式の対称性(方程式を不変に保つ座標変換)

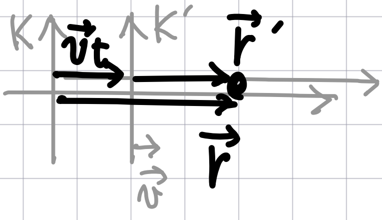
(N) ニュートンの運動方程式 $m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$

Galilei Boost (G.B.)

定義3.7 (ガリレイ変換) := (3次元回転)+(ガリレイ・ブースト)+(平行移動)

$$\vec{r}\,'=R(\theta)\vec{r}\qquad\begin{cases}\vec{r}\,'=\vec{r}-\vec{v}t\\ t'=t\ (\text{絶対時間})\end{cases}\qquad\vec{r}\,'=\vec{r}+\vec{a}$$

普通は(3次元直交変換)
回転&折り返し



直線的な慣性系間の座標変換

定理3.8 ガリレイ変換の下、

mが不変 & $\vec{F}$が$\vec{r}$と同じ変換性をもつ ⇒ (N)は不変

∵ G.B.: $\ddot{\vec{r}}\,'=\ddot{\vec{r}}$, 回転: $m\ddot{\vec{r}}\,'-\vec{F}'=R(\theta)(m\ddot{\vec{r}}-\vec{F})=\vec{0}$ ☒

命題3.9 ガリレイ変換全体は群をなす(ガリレイ変換群)

(M) マクスウェルの方程式

簡単な状況で考察

$\rho = 0,\ \vec{j} = \vec{0}$ のとき (M) ⇒ 波動方程式 (レポート13) (cf. 配付プリント)

$ch := \cosh \quad sh := \sinh$

1次元波動 eq.

$$\underbrace{(\partial_0^2 - \partial_1^2)}_{= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}} f(x^0, x^1) = 0 \quad \cdots (W)$$

これは $\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$

∵ $ch^2\theta - sh^2\theta = 1$ で不変

cf. ラプラス eq.

$$(\partial_0^2 + \partial_1^2) f(x^0, x^1) = 0$$

これは $\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$

∵ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ で不変

一方 (W) はガリレイ変換の下不変でない

Lorentz Boost (L.B.)

定義 3.8 (ローレンツ変換) = (3次元回転) + (ローレンツ・ブースト)

↖ 普通は (3次元直交変換)

$$(\text{L.B.}) \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\shortparallel} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$\beta := \frac{v}{c}, \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

注 3.9

- $\begin{pmatrix} ch\xi & -sh\xi \\ -sh\xi & ch\xi \end{pmatrix}$ と書ける

  $ch\xi = \gamma,\ sh\xi = \beta\gamma,\ \tanh\xi = \beta$

- $\beta = \frac{v}{c} \to 0$ で (L.B.) → (G.B.)

定理 3.10 (M) はローレンツ変換の下、不変

命題 3.11 ローレンツ変換全体は群をなす

〈Summary〉

	古典力学	電磁気学
ガリレイ変換	不変	×
ローレンツ変換	×	不変

今日の課題　以下の(i),(ii)いずれかを解け

(i) 今日の配付資料裏面の双曲線関数の公式(1)〜(10)のうち
　どれか1つを定義に基づいて示せ

(ii) 以下の"パラドックス"について思うことを書け