2.2 正準交換関係と不確定性原理

定義2.11 (q^i, p_i) を古典力学での粒子の正準変数(位置,運動量)とする.
これらを、以下をみたすように $\mathcal{H}$ 上の ops. $\hat{q}, \hat{p}$ におきかえる操作を正準量子化という.

$$[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta^i_j, \quad [\hat{q}^i, \hat{q}^j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

正準交換関係(Canonical Commutation Relation = CCR)と呼ぶ
(基本ポアソン括弧(例1.45上3つの式)において、$\{\ ,\ \}_{P.B} \to \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$ とおきかえたもの)

以後 簡単のため実向1次元で考える

例2.12 (CCRの例)

「A表示」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\hat{A}$ を対角化する表示

(i) $\hat{q} = q, \ \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ (q表示)
(Schrödinger量子化)

$\exists \{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ 完全系 s.t. $\begin{cases} \hat{q}|q\rangle = q|q\rangle \\ \hat{p}|q\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}|q\rangle \end{cases}$

(ii) $\hat{q} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, \ \hat{p} = p$ (p表示)

$\exists \{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$ s.t. $\begin{cases} \hat{q}|p\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}|p\rangle \\ \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \end{cases}$

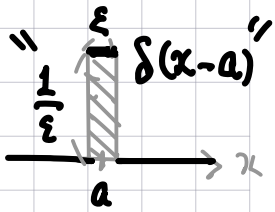
定義2.13 $\Lambda = \mathbb{R}$ のとき

- 正規直交系 $\Leftrightarrow$ $\langle\lambda|\lambda'\rangle = \delta(\lambda - \lambda')$
- 〃 が完全系 $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, |\lambda\rangle\langle\lambda| = 1_{\mathcal{H}}$

cf. Gelfandの3つ組 $(\Omega, \mathcal{H}, \Omega')$
Ω: $\mathcal{H}$より小さい, Ω': $|q\rangle$

定義2.14 (Diracのデルタ関数)

以下をみたす汎関数 $\delta : f \mapsto f(a)$ を delta-fcn. と呼ぶ

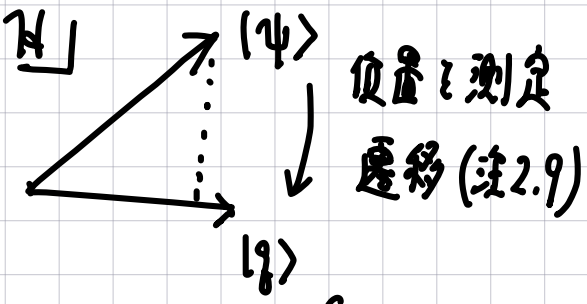


$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a) \quad (a \in \mathbb{R})$$

test fcn.

命題2.15 $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk$

注2.17 $\{|q\rangle\}$ について



(遷移確率) $|\psi\rangle = \text{"}\sum_q\text{"} c_q |q\rangle$

$$|c_q|^2 = |\underbrace{\langle q|\psi\rangle}_{\psi(q)}|^2 = |\psi(q)|^2$$

Bornの確率解釈

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int dq\, \bar{\psi}(q)\psi(q) = \int dq\, \langle\psi|q\rangle\langle q|\psi\rangle$$

標準的内積

$\langle\psi| = \text{"}\sum_q\text{"} \langle q|\bar{c}_q$

$\forall|\psi\rangle$ $\int dq\, |q\rangle\langle q| = 1$

$$\forall\psi(q) = \langle q|\psi\rangle = \int dq'\, \underbrace{\langle q|q'\rangle}_{\delta(q-q')}\underbrace{\langle q'|\psi\rangle}_{\psi(q')}$$

↑ 完全系

となるべし

注2.18 $|q\rangle \to |p\rangle$ の基底変換

$$\psi(q) = \langle q|\psi\rangle = \int dp\, \underbrace{\langle q|p\rangle}_{?}\underbrace{\langle p|\psi\rangle}_{\psi(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, e^{\frac{ipq}{\hbar}}\psi(p)$$

↑ pの完全系

Fourier変換!

一方

$$\langle q|\hat{p}|p\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}\langle q|p\rangle$$

$$\| $$

$$p\langle q|p\rangle \longrightarrow p(q) = A e^{\frac{ipq}{\hbar}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

波動関数にはU(1)因子の不定性があるため(22ページ) $e^{i\theta}$ は略した

今日の課題 $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ を示せ

(答) $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$ ⇕ $2\pi\hbar|A|^2\delta(p'-p)$

↑ qの完全系を挿入

$\delta(x) = \delta(-x)$ にも注意

$\| 2.15$

$$\int dq\, \underbrace{\langle p|q\rangle}_{\bar{A}e^{-\frac{ipq}{\hbar}}}\underbrace{\langle q|p'\rangle}_{Ae^{\frac{ip'q}{\hbar}}} = |A|^2\int dq\, e^{\frac{iq}{\hbar}(p'-p)} \underset{q\mapsto q\hbar}{=} |A|^2\hbar\int dq\, e^{iq(p'-p)}$$

命題2.19 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$: エルミートops. が $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ をみたすとする.

$\Delta\hat{F} := \hat{F} - \langle\hat{F}\rangle$ として $\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{\langle\hat{C}\rangle^2}{4}$ (Robertsonの不等式)

∵ $\underset{\in\mathbb{R}}{I(\alpha)} := \langle\forall\psi|\underbrace{(\alpha\Delta\hat{A} - i\Delta\hat{B})(\alpha\Delta\hat{A} + i\Delta\hat{B})}_{(\Delta\hat{A})^2\alpha^2 + i[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\alpha + (\Delta\hat{B})^2}|\psi\rangle = |(\alpha\Delta\hat{A} + i\Delta\hat{B})|\psi\rangle|^2 \geq 0$

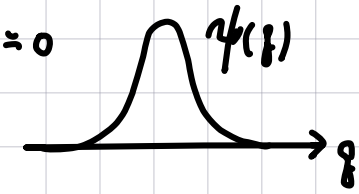
$= \langle(\Delta A)^2\rangle\alpha^2 - \langle\hat{C}\rangle\alpha + \langle(\Delta\hat{B})\rangle^2$ 判別式 $\leq 0 \Rightarrow$ よ式 ∎

(等号成立 $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\langle\hat{C}\rangle}{2\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle}$)

系2.20 $\hat{A} = \hat{q}, \hat{B} = \hat{p}, \hat{C} = \hbar$ で

$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ (Heisenbergの不確定性原理) $\Delta F := \sqrt{\langle(\Delta\hat{F})^2\rangle}$

注2.21 等号成立 $\Leftrightarrow$ Gaussian(波束) $\psi(q) \underset{\langle\hat{q}\rangle = 0, \langle\hat{p}\rangle = 0}{=} A e^{-\frac{q^2}{4(\Delta q)^2}}$



∵ $\alpha = \frac{\hbar}{2(\Delta q)^2}$ & $(\alpha\Delta\hat{q} + i\Delta\hat{p})|\psi\rangle = 0$

$\langle q| \rightarrow \Downarrow$

$\langle q|(\alpha\underbrace{\Delta\hat{q}}_{\hat{q} - \underbrace{\langle\hat{q}\rangle}_{=0}} + i\underbrace{\Delta\hat{p}}_{\hat{p} - \underbrace{\langle\hat{p}\rangle}_{=0}})|\psi\rangle \Rightarrow \left(\alpha q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\psi(q) = 0$ ∎

q

$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$

※ レポート問題9(経路積分など)追加しました