'20 5/29

1.7 ポアソン括弧

(q^i, p_i) 正準変数　　$i = 1, \cdots, n$

定義1.44 $f(q,p,t)$, $g(q,p,t)$ に対して、Poisson Bracket (P.B.) を以下のように def する：

iについて和

$$\{f, g\}_{P.B.} := \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}$$

以後、省略

例1.45 $\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$, $\{q^i, q^j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$

$$\{q^i, f\} = \frac{\partial f}{\partial p^i}, \quad \{p_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q^i}$$

命題1.46 (i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$　(特に $\{f, f\} = 0$)

(ii) $\{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + b\{f, h\}$

(iii) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$　Jacobi id

(iv) $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$

命題1.47

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\underbrace{\frac{dq^i}{dt}}_{=\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\underbrace{\frac{dp_i}{dt}}_{=-\frac{\partial H}{\partial q^i}}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

正準eq.

定義1.48 f と g がポアソン可換 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{f, g\} = 0$
(or 完全可換 involutive)

系1.49 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ のとき、$\{f, H\} = 0 \Leftrightarrow \frac{df}{dt} = 0$ (f は保存量)

命題1.50 (ポアソンの定理)

$$\dot{f}=0,\ \dot{g}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\{f,g\}=0$$

∵ $$\frac{d}{dt}\{f,g\} \overset{1.47}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}}_{\text{Leibniz}} + \underbrace{\{\{f,g\},H\}}_{\text{Jacobi}} \overset{1.47}{=} \left\{\frac{df}{dt},g\right\} + \left\{f,\frac{dg}{dt}\right\} = 0$$

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\} + \left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\} \qquad \{\{f,H\},g\} + \{f,\{g,H\}\}$$

■

注1.51 $\frac{d}{dt}$ と $\frac{\partial}{\partial q^i}$ or $\frac{\partial}{\partial p_i}$ とは可換でない. (cf $\frac{\partial}{\partial t}$ と $\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial p_i}$ とは可換)

実際 $$\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\frac{d}{dt}-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q^i}\right)f(q,p,t)=\left\{f,\frac{\partial H}{\partial q^i}\right\}$$ ← これを示せ (今日の課題)

例1.52 $\{L_1,L_2\}=L_3$ (角運動量の成分)

注1.53 ある保存量のセット $\{Q_1,\cdots Q_M\}$ があって、$\langle Q_1,\cdots,Q_M\rangle$ はポアソン括弧を積とするリー代数をなす.

線形空間であって Prop 1.46 (i)〜(iii) をみたす積 $\{,\}$ が定義されたもの.

$$\{Q_i,Q_j\}=\underbrace{C_{ij}{}^k}_{\text{構造定数}}Q_k$$

詳しくはレポート問5,6

例1.54 (ケプラー運動)

$E<0$ とする. $\vec{L}$, $\vec{M}:=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\vec{A}$

$$\{L_i,L_j\}=\epsilon_{ij}{}^kL_k$$
$$\{M_i,L_j\}=\epsilon_{ij}{}^kM_k$$
$$\{M_i,M_j\}=\epsilon_{ij}{}^kL_k$$

$$\xrightarrow{B_i^{(\pm)}:=\frac{1}{2}(L_i\pm M_i)}$$

$$\{B_i^{(+)},B_j^{(+)}\}=\epsilon_{ij}{}^kB_k^{(+)}$$
$$\{B_i^{(-)},B_j^{(+)}\}=\epsilon_{ij}{}^kB_k^{(-)}$$
$$\{B_i^{(+)},B_j^{(-)}\}=0$$

← $so(4)\simeq su(2)\oplus su(2)$ →
(2月型) (2月型)

定義1.55 自由度nのハミルトン・システムが、互いにポアソン可換なn個の保存量Q_iを持つとき、完全可積分系という。
completely integrable system

定理1.56 (Liouvilleの定理)
完全可積分系は求積法(四則演算,逆関数演算,微分,不定積分)で解ける

注1.57 Arnoldはのちにこの定理を幾何学的に定式化している
(Liouville-Arnoldの定理とも呼ばれる)

☆ 可積分 $\leftrightarrow$ 多くの保存量 $\leftrightarrow$ 高い対称性
(cf. ソリトンの佐藤理論: ∞個の保存量 $\leftrightarrow$ ∞次元の対称性)