'20 5/22

1.6 ハミルトン形式の力学

$L(q, \dot{q}, t)$: ラグランジアン

q^i : 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$: 〃 運動量　　$i = 1, \cdots, n$

定義1.38　L が非特異 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0$　（以下これを仮定）

ラグランジュ形式　$L = L(q, \dot{q}, t)$

$\updownarrow$ ルジャンドル変換（1対1）

ハミルトン形式　$H = H(q, p, t)$

定義1.39（ルジャンドル変換）

$x = (x^1, \cdots, x^n)$

$F(x)$: x^i の関数　$\left(\det \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \neq 0\right)$

とする。ここで変数 y_i を

$$y_i := \frac{\partial F}{\partial x^i}$$

で、関数 $G(y)$ を　　i について和

$$F(x) + G(y) = x^i y_i$$

で定義する。$F(x), x$ と $G(y), y$ との対応を Legendre 変換という

命題1.40　Legendre 変換は1対1であり、$x^i = \dfrac{\partial G}{\partial y_i}$, $\det \dfrac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j} \neq 0$ が成り立つ

〈n=1での説明 & 解析力学の設定〉

$F = F(q, x)$ の全微分:　　(← $x \equiv \dot{q}$ と解釈)

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{\equiv y} dx \quad \cdots ①$$

定義より

$$G = xy - F(q, x) \quad \cdots ②$$

← x は y の関数として書き直せている

$\left(\det \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \neq 0 \right)$

このとき

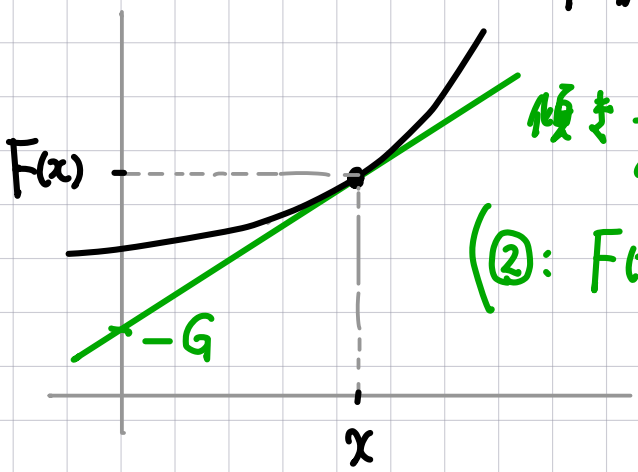
$$dG = dx\, y + x\, dy - dF \overset{①}{=} x\, dy - \frac{\partial F}{\partial q} dq$$

より, G は y, q の関数となっている. このとき

$$x = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{\partial G}{\partial q}$$

※ 図形的意味

F が凸 $\left(\det \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \neq 0 \right) \Rightarrow y, G$ が一意に定まる

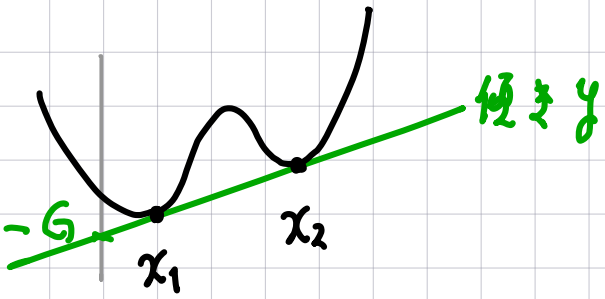


傾き $\frac{\partial F}{\partial x} = y$

$\left(②: F(x) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{= y} x - G \right)$

F が凸でないと

1対1でなくなる



▨

このLegendre変換で $x \equiv \dot{q}$, $y \equiv p$, $F = L$, $G = H$ と同一視すると

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

定義1.40 $H(q,p,t) = \dot{q}^i p_i - L(q,\dot{q},t)$ をハミルトニアンという (Hamiltonian)

注1.41
- $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ のとき H は保存量 (先週 例1.37 (3))
- $\dot{p}_i \overset{E\text{-}L}{=} \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$

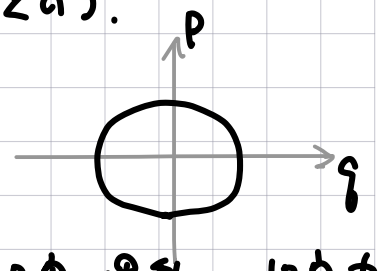
定義1.42 $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$

を (ハミルトンの) 正準方程式といい、(q,p) を正準変数という。
canonical eq. canonical variables

Summary	Lagrange形式	Hamilton形式
スカラー関数	L	H
変数	$(q,\dot{q})$ 非対称	(q,p) 対称
基本方程式	Euler-Lagrange eq. (tについて2階)	Hamiltonの正準eq. (tについて1階)
eq.を不変に保つ変数変換	点変換 $Q = Q(q)$	正準変換 $P = P(p,q), Q = Q(q,p)$
幾何学的舞台	接ベクトル束 TN	余接ベクトル束 T^*N

← Legendre変換 (1:1) →

定義1.43 $\{(q,p)\}_{q \in N}$ を相空間 (phase sp.) という。



現実の運動 ↔ 相空間内の曲線

[アーノルド] 正準力学は相空間の幾何学化 (力学の幾何学化)
⇝ シンプレクティック幾何