'20 5/15

1.5 対称性と保存則

自由度 n の質点システム $L(q, \dot{q}, t)$ を考える

$L(q^i, \dot{q}^i, t)$ の略記

$n \to N$

EL eq. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$

「i」を略記

ラグランジアン $L = \dfrac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} - U(\vec{r}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$

<u>定義1.30</u> $\dfrac{d}{dt}Q(q, \dot{q}, t) = 0$ を保存則といい、Q を保存量という。

<u>定義1.31</u> $p_i := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ を（q^i に共役な）一般化運動量という。

（例）Cartesian座標： $\vec{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}$ （普通の運動量）

極座標 $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = L_z$

（角運動量の z 成分）

<u>定義と命題1.32</u>

q^m : cyclic coordinate （循環座標） $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\dfrac{\partial L}{\partial q^m} = 0$ （L に q^m が陽に入っていないということ）

このとき、$p_m = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}$ は保存量 （∵ EL eq.）

<u>注1.33</u> q^i をうまく選んで、できるだけ多くの cyclic coords. を見つけると解きやすくなる。

（EOM は2階の微分 eq. ↔ Q = 一定（保存則）は1階の微分 eq.）

<u>定義1.34</u> ある変数変換 $q(t) \mapsto q'(t)$ で <u>L の関数形が不変</u>であるとき

$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t)$

システムはその変換に関して対称性をもつという。

（例）(i) L が x^m を陽に含まないとき、システムは <u>x^m 方向への平行移動</u>

$x^m \mapsto x'^m = x^m + a^m$

に関して対称性をもつ。

(ii) L が方位角 φ を陽に含まないとき、〃 z 軸まわりの回転に関して〃

定理1.35（ネーターの定理）　　※（対称性）⇒（保存量）

εを無限小パラメータとする微小変換：

$$q^i(t) \mapsto q'^i(t) = q^i(t) + \varepsilon F^i(q, \dot{q}, t) \qquad \cdots (*)$$

の下で $L(q, \dot{q}, t)$ が不変ならば、以下のQは保存量：

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} F^i \qquad \text{（ネーターチャージという）}$$

∵ $\delta q^i = \varepsilon F^i$ と書くと、（先週と同様の議論により）

$$\delta L(q, \dot{q}, t) = L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t)$$

$$= \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right)$$

iについて和です

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \underbrace{\delta q^i}_{\varepsilon F^i} \right) - \overbrace{\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right\}}^{0 \ \text{// EL eq.}} \delta q^i \overset{L\text{不変}}{=} 0$$

∎

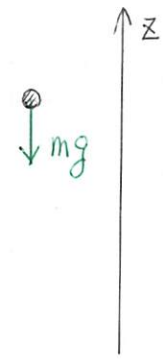
定義と系1.36　上記変換(*)に対して

$$\delta L = \varepsilon \frac{d}{dt} Y(q, \dot{q}, t)$$

となるとき、Lは準不変であるという。

このとき $Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} F^i - Y$ は保存量　　☺ 今日の課題です ∎

（例）一様な重力の下での質点の鉛直方向の運動



$$L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$$

$z \mapsto z' = z + \varepsilon$ なる変換で $\delta L = -\varepsilon \frac{d}{dt}(mgt)$

$$Q = m(\dot{z} + gt) \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = 0$$

$$\uparrow$$

$$\text{EOM} \quad m\ddot{z} = -mg$$

例 1.37　以下の変換の下、L が不変とする。

(1) 空間並進 $\vec{r}_\alpha \mapsto \vec{r}_\alpha{}' = \vec{r}_\alpha + \varepsilon\vec{n}$ …①

$\vec{F}_\alpha = \vec{n}$ より　$Q = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}\cdot\vec{F}_\alpha = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha\cdot\vec{n}$　（∝ 全運動量の $\vec{n}$ 方向成分）

(2) 空間回転 $\vec{r}_\alpha \mapsto \vec{r}_\alpha{}' = R(\theta)\vec{r}_\alpha$　（z 軸まわりの回転）

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(\text{無限小})}{\overset{\theta=\varepsilon}{=}} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{O(\varepsilon^2)}_{\text{無視}}$$

$$\begin{pmatrix} x_\alpha' \\ y_\alpha' \\ z_\alpha' \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} & & \\ & 〃 & \\ & & \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} & & \\ & 〃 & \\ & & \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} + \varepsilon \underbrace{\begin{pmatrix} -y_\alpha \\ x_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{F}_\alpha}$$

角運動量

$$Q = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha\cdot\vec{F}_\alpha = \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha)_{z\text{成分}} = \sum_\alpha (\vec{L}_\alpha)_{z\text{成分}}$$

(3) 時間並進 $t \mapsto t' = t + \varepsilon$　（素朴に議論）

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}_{p_i}\dot{q}^i\Big) - \underbrace{\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right\}}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{EL eq}}\dot{q}^i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{時間並進不変}}$$

$\therefore$ $H := p_i\dot{q}^i - L$ は保存量（「ハミルトニアン」という）

（注）$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}^2$ のとき $H = T + U$（全エネルギー）

まとめると
- 空間並進の対称性 ⇒ 運動量保存則
- 〃 回転 〃 ⇒ 角運動量保存則
- 時間並進 〃 ⇒ エネルギー保存則