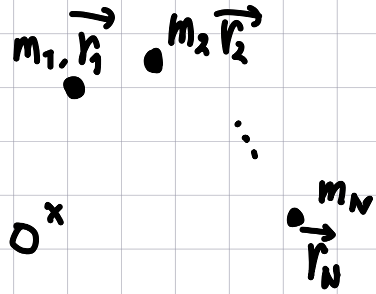
'20 5/1

1.2 仮想変位、ダランベールの原理

・N個の質点からなるシステム(system)を考える.

EOM: $m_\alpha \dfrac{d^2\vec{r}_\alpha}{dt^2} = \vec{F}_\alpha \qquad \alpha = 1, \cdots, N$



$\vec{x} := (\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N)$: N質点の座標

$(m_1, \cdots, m_N)$: 〃 質量

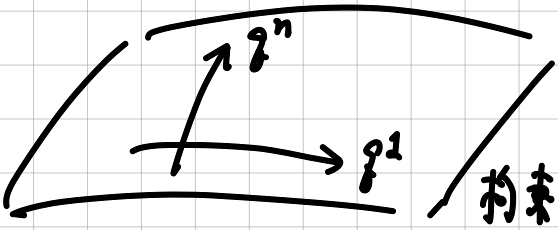
・このシステムに以下の独立な拘束条件が与えられたとする

$$f_s(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N, t) = 0 \qquad s = 1, \cdots, p$$

このとき $(3N-p)$ 個の独立なパラメータを用いて

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q^1, \cdots, q^n, t) \quad (=: \vec{r}_\alpha(q, t) \text{ と略記})$$

とパラメトライズできる.



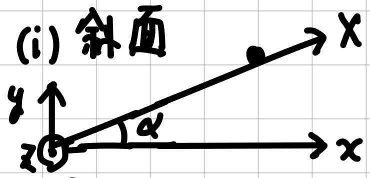
拘束面 N $(\dim N = n = 3N - p)$

定義1.14 $N = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_s(\vec{x}, t) = 0,\ s = 1, \cdots, p\}$ を配位空間(configuration space)という.

$(q^1, \cdots, q^n)$ を一般化座標という. (n: システムの自由度)

例1.15 (cf. 前ページ)

(i) 斜面



$f_1(\vec{r}) = y - \tan\alpha \cdot x = 0$

自由度2, $q^1 = X$, $q^2 = z$

$N = Xz$平面

(ii) 球面振り子

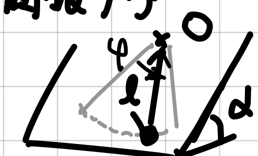
$\tilde{f}_1(\vec{r}) = |\vec{r}| - \ell = 0$

自由度 2

$q^1 = \theta$, $q^2 = \varphi$

$N = S^2$ (球面)

(iii) 斜面振り子



$f_1(\vec{r}) = 0$, $\tilde{f}_1(\vec{r}) = 0$

自由度1, $q^1 = \varphi$. $N = S^1$

・以後 EoM の右辺の力は保存力と拘束力のみと仮定 (理想化)：

改めて、$\underbrace{\vec{F}_{\alpha,\text{total}}}_{\text{EoM の右辺の力}} = \underbrace{\vec{F}_\alpha}_{\text{保存力}} + \underbrace{\vec{F}'_\alpha}_{\text{拘束力 (拘束面と垂直!)}}$ と書く

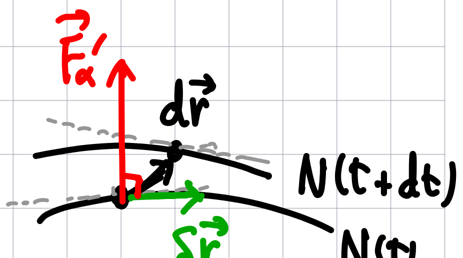
定義1.16 拘束面 N 上での無限小変位を仮想変位といい、以下で表す

$$\delta\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}\delta q^i \quad \left(:= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}\delta q^i \ : \text{Einstein の規約} \right)$$

同じ添字が単項式の中にあるときは和がとられていると約束

注1.16 $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q^i, t)$ の全微分

$$d\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}dq^i + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}dt}_{\text{ここが違う}} \quad \cdots ①$$



$$\underbrace{\vec{F}'_\alpha}_{\text{拘束力}} \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

内積

$\vec{F}'_\alpha \overset{\text{EOM}}{=} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha$ ← 保存力

命題1.17 (ダランベールの原理)
d'Alembert

$$\sum_\alpha \left\{ (\vec{F}_\alpha - m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \right\} \delta q^i = 0$$

(拘束力のする(仮想)仕事はゼロ)

例1.18 球面振り子 $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - \frac{T}{l}\vec{r}$ (例1.13)

$$(m\vec{g} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\{\underbrace{ml^2(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2) - mgl\sin\theta}_{=0}\}\delta\theta + \underbrace{ml^2(\sin^2\theta\,\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta})}_{=0}\delta\varphi = 0$$

⇔ EoM

↓ 同じ結果 (T は自動的に排除)

※ $\delta\theta$, $\delta\varphi$ は $T^*_q N$ の基底

1.3 ラグランジュ形式の力学

保存力 $\vec{F}_\alpha = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha}$　$\left(\dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} := \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \nabla \text{ とも書く}\right)$

nabla (ナブラ)

ポテンシャル・エネルギー $U = U(q,t)$

運動エネルギー $T = \sum_\alpha \dfrac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} = T(q,\dot{q},t)$

__定義1.19__ $L(q,\dot{q},t) := T-U$ をラグランジアン (Lagrangian)という

__定理1.20__ EoMは単一のスカラー関数 L だけを用いて以下のように書ける

ここにシステムの情報がすべて入っている

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad i=1,\cdots,n$$

これをラグランジュ方程式という.

∵ ダランベール: $\sum_\alpha \left(m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha\right)\cdot \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_\alpha \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}}_{=\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}^i}}\right) - m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}\right)}_{=①}\right\} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \quad \cdots (*)$$

①より
$\dot{\vec{r}}_\alpha = \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i}\dot{q}^i + \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}$
両辺, $\dot{q}$で偏微分
$(q,t\text{: fix})$

$$① = \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial q^j \partial q^i}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial t \partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q^i}$$

$$\therefore (*)\text{の左辺} = \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}^i}\right) - \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q^i}$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\underbrace{\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha}_{T}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\underbrace{\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha}_{T}\right)$$

$$(*)\text{の右辺} = \sum_\alpha \left(-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha}\right)\cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i} \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i} = 0 \text{ に注}\right)$$

∎