

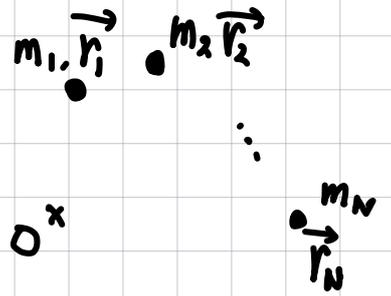
1.2 仮想変位、ダランベールの原理

20
5/1

5

• N個の質点からなるシステム (system) を考える。

EOM: $m_\alpha \frac{d^2 \vec{r}_\alpha}{dt^2} = \vec{F}_\alpha \quad \alpha = 1, \dots, N$



$\vec{x} := (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$: N 質点の座標
 (m_1, \dots, m_N) : " 質量

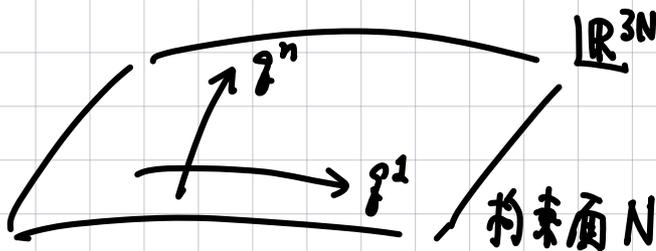
• このシステムに以下の独立な拘束条件が与えられたとする

$f_s(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad s = 1, \dots, p$

このとき $(3N - p)$ 個の独立なパラメータを用いて

$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q^1, \dots, q^n, t) \quad (=:\vec{r}_\alpha(q, t) \text{ と略記})$

とパラメータライズできる。



定義 1.14 $N = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_s(\vec{x}, t) = 0, s = 1, \dots, p \}$ と

配置空間 (configuration space) とする。

(q^1, \dots, q^n) と一般化座標という。 (n : システムの自由度)

例 1.15

(cf. 前ページ)

(i) 斜面

$f_1(\vec{r}) = y - \tan \alpha \cdot x = 0$
 自由度 2, $q^1 = x, q^2 = z$

(ii) 球面振り子

$\tilde{f}_1(\vec{r}) = |\vec{r}| - l = 0$
 自由度 2
 $q^1 = \theta, q^2 = \varphi$

(iii) 斜面振り子

$f_1(\vec{r}) = 0, \tilde{f}_1(\vec{r}) = 0$
 自由度 1, $q^1 = \varphi$

・以後 EOM a 右辺 a 力は 保存力 と 拘束力 a み と 仮定 (理想化): ⑥

改以て, $\vec{F}_{\alpha, total} = \underbrace{\vec{F}_{\alpha}}_{\text{保存力}} + \underbrace{\vec{F}'_{\alpha}}_{\text{拘束力 (拘束面と垂直!)}}$ と書く

定義 1.16 拘束面 N 上での無限小変位と仮想変位とをいふ。以下で表す

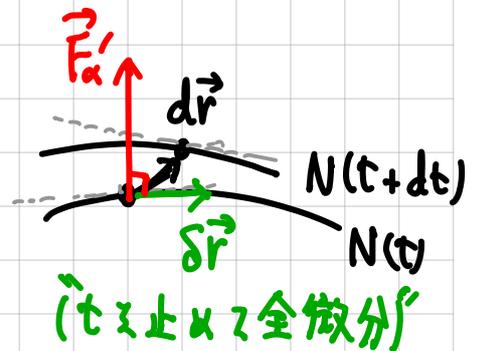
$$\delta \vec{r}_{\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q^i} \delta q^i \quad \left(:= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q^i} \delta q^i : \text{Einstein の規約} \right)$$

↑ 同じ添字が単項式の中にあるときは和をとっているとの約束

注 1.16 $\vec{r}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha}(q^i, t)$ a 全微分

$$d\vec{r}_{\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} dt \quad \dots \textcircled{1}$$

~~~~~ :: 間違;



$$\vec{F}'_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0$$

↑ 拘束力 内積

$$m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} - \vec{F}_{\alpha} = \text{保存力}$$

↑ EOM

命題 1.17 (ダランベールの原理)  
d'Alembert

$$\sum_{\alpha} \left\{ (\vec{F}_{\alpha} - m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha}) \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q^i} \right\} \delta q^i = 0 \quad (\text{拘束力 a する (仮想) 仕事は 0})$$

例 1.18 球面振り子  $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - \frac{T}{l}\vec{r}$  (例 1.13)

$$(m\vec{g} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta \vec{r} = 0$$

⇓

$$\left\{ ml^2 (\ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2) - mgl \sin\theta \right\} \delta\theta$$

$$+ ml^2 (\sin^2\theta \ddot{\varphi} + 2 \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi} \dot{\theta}) \delta\varphi = 0$$

⇐ EOM

↓ 同じ結果 (T は自動的に排除)

\*  $\delta\theta, \delta\varphi$  は  $T^*_q N$  の基底

# 1.3 ラグランジュ形式の力学

保存力  $\vec{F}_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha}$

ポテンシャル・エネルギー  $U = U(q, t)$

運動エネルギー  $T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 = T(q, \dot{q}, t)$

定義 1.19  $L(q, \dot{q}, t) := T - U$  を ラグランジアン (Lagrangian) といい

定理 1.20 EoM は単一のスカラー関数  $L$  だけを用いて以下のように書ける

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

ここにシステムの情報が入っている

これをラグランジュ方程式という。

⊙ ダランベール:  $\sum_\alpha (m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{F}_\alpha) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_\alpha \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \right) - m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \right) \right\} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \quad \dots (*)$$

⊙より  
 $\dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}$   
 両辺、 $\dot{q}^i$  偏微分  
 ( $q, t: \text{fix}$ )

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}^i}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial q^i \partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial t \partial q^i}$$

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q^i}$$

$$\therefore (*) \text{の左辺} = \frac{d}{dt} \left( \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} \right) - \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q^i}$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left( \underbrace{\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha}_T \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \underbrace{\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha}_T \right)$$

$$(*) \text{の右辺} = \sum_\alpha \left( -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i} \quad \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i} = 0 \text{ に注意} \right) \quad \blacksquare$$