

# §1 古典力学

## 1.1 Newton 力学

舞台:  $\mathbb{R}^3$

1質点の $\mathbb{R}^3$ 内での運動を考える

・位置(position)  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

・速度(velocity)  $\vec{v}(t) := \frac{d\vec{r}}{dt}(t) (= \dot{\vec{r}} \text{ も可})$

・加速度(acceleration)  $\vec{a}(t) := \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \ddot{\vec{v}}$

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$   
用い理由:  
 $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$

### 法則 1.1 (Newton の運動法則)

(I) (慣性の法則) 質点に力が加わらなければ、質点は等速直線運動を続ける。(特に静止している質点は静止したままである。)

(II) (運動方程式) 質点に力  $\vec{F}$  が加わると、以下のとおり加速度  $\vec{a}$  が生じる。  
Equation of Motion  $m\vec{a} = \vec{F}$  ( $m$ : 質点の質量(mass))

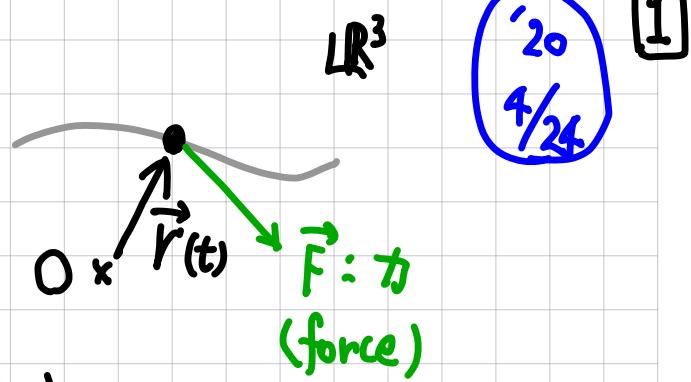
(III) (作用・反作用の法則) 2つの質点間にたゞき合ひ力は大きさが等しく、向きが互いに逆である。



定義 1.2 運動法則 1.1 が成り立つ座標系を慣性系(inertial frame)という

注 1.3 • 法則(I) は 慣性系の存在を保証する命題

- 法則(III) は 質量の定義に用いられた (by Mach)
- 物質(物体)と力は別物(二元論) (力の起源は「場」)



定義1.4 運動量  $\vec{p} := m\vec{v}$

$$\overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}^{\text{力積}} \quad \text{[2]}$$

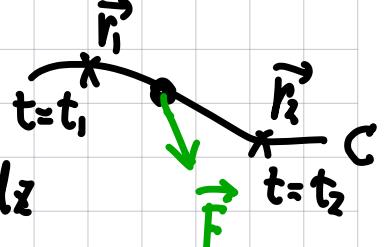
定義1.5 EOM  $\dot{\vec{p}} = \vec{F} \Rightarrow \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

定義1.6 角運動量  $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$   
力モーメント  $\vec{N} := \vec{r} \times \vec{F}$  }  $\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \vec{N}$

定義1.7  $\vec{r}_1$  から  $\vec{r}_2$  へ経路  $C$  上で、質点が運動すると  $\vec{F}$  がする仕事

$$W := \int_{C(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

"内積"  $\equiv F_x dx + F_y dy + F_z dz$



定義1.8 力  $\vec{F}$  の仕事を事が始点  $\vec{r}_1$  を終点  $\vec{r}_2$  だけ決まり。途中の経路  $C$  はどうか  $\vec{r}_1$  と  $\vec{r}_2$  と  $\vec{F}$  と保有力 (conservation force) に依る。

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{r} \cdot \vec{r} \right) dt \\ &= T(t_2) - T(t_1) \end{aligned}$$

$$T(t) := \frac{1}{2} m \vec{r}^2 = \frac{1}{2m} \vec{p}^2$$

今題1.9  $\vec{F}$ : 保有力

運動エネルギー  $(\vec{a}^2 := \vec{a} \cdot \vec{a})$

$$\Leftrightarrow \vec{U}(\vec{r}) \text{ s.t. } \vec{F} = -\text{grad } \vec{U}(\vec{r})$$

力のポテンシャル

④ポテンシャルの概念

$$(U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ (経路によらない)})$$

系1.10 物体に働く力が保有力

$$\Rightarrow W = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = T(t_2) - T(t_1)$$

すなむち 全エネルギー  $E := T + U$  が保有する (エネルギー保存則)

例1 物体の自由落下 (初期条件  $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}(0) = \vec{0}$ ) [3]

(i) 実験抵抗ありの場合 (プリント「はじめに」例題1)

$$EOM: m \frac{d\vec{z}}{dt^2} = -mg \quad (\text{定数})$$

↓  $t^2$  2回積分

$$\vec{z} = C_2 + C_1 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{一般解})$$

↑ 積分定数

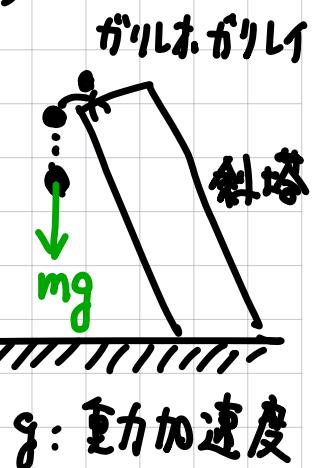
↓ 初期条件より  $C_2 = h, C_1 = 0$  となる

$$\vec{z}(t) = h - \frac{1}{2} g t^2, \quad v(t) = -gt$$

↓  $\vec{z}(T) = 0$  より

$$h = \frac{1}{2} g T^2 \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2) \quad \begin{matrix} \text{(1) } h \propto T^2 \\ \text{(2) } T \text{ は } m \text{ に} \end{matrix}$$

(T: 地面に落する  
までの時間)



$g$ : 重力加速度

ガリレイの実験結果

$$(1) h \propto T^2$$

$$(2) T \text{ は } m \text{ に} \text{ 依存する}$$

(ii) 速さに比例する空気抵抗力のある場合 (粘性抵抗力)

$$EOM: m \frac{dv_z}{dt} = -mg - m \underbrace{k}_{\text{比例定数}} v_z$$

比例定数 ( $k > 0$ )

↓ 今日の課題

$$z(t) = h - \frac{g}{k} t + \frac{g^2}{k^2} \left( 1 - e^{-kt} \right), \quad v_z(t) = \frac{g}{k} \left( e^{-kt} - 1 \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{g}{k}$$

一定値

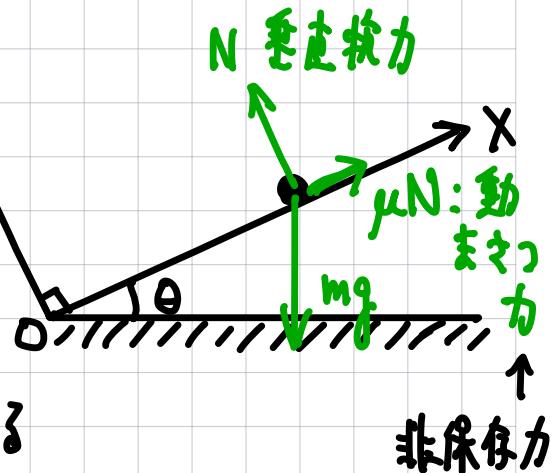
(iii) 速さの2乗に比例する空気抵抗力 (慣性抵抗力) の場合 (終端速度)

レポートにします (詳細は後日)

\* 空気抵抗力は保存力ではない

## 例2 斜面での運動 (動摩擦係数 = $\mu$ )

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \theta - \mu N \\ m\ddot{y} = N - mg \cos \theta \\ \text{III} \leftarrow \text{斜面上に拘束 } y = 0 \end{cases}$$



注 N は未知変数で拘束条件から決まる

拘束面 = 平面π ( $y = 0$ )

条件1つ ⇔ 自由度を1つ減る

## 例3 球面振り子

$$EoM \quad m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{T}$$

$$- \frac{T}{l} \vec{r}$$

$$\begin{aligned} \text{極座標} & \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \\ & \downarrow \end{aligned}$$

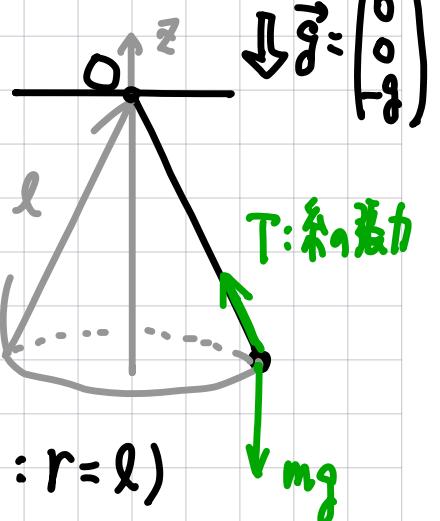
拘束面

半径 l の球面

$$S_l^2$$

(拘束条件:  $r = l$ )

$$\theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t)$$



$$\begin{cases} ml(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = mg \cos \theta + T \end{cases} \quad \leftarrow T \text{を決める式}$$

$$\begin{cases} ml(\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) = mg \sin \theta \\ ml(\sin \theta \ddot{\varphi} + 2 \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

】運動を決める式

\* 拘束力 N, T (はじめから) 消去し、拘束面上の EoM を考えたい  
→ 一般化座標

\* 座標のえり方によりより簡式化をした → 解析力を求