テイラーの定理

Jacques Garrigue, 2019 年 6 月 11 日

関数の多項式近似　平均値の定理を各導関数に対して繰り返し使うと，n 回微分可能な関数を多項式で近似できる．

定理 2.4.1 (Taylor) 関数 $f(x)$ が $D^n(I)$ に属するとする (I 開区間). 任意の $a, b \in I$ について

$$\exists c \in (a,b) \cup (b,a),\ f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

$n = 1$ のとき，平均値の定理そのものになる．

剰余項　テイラーの定理の中の $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$ を剰余項または剰余という．

定理 2.4.2 (有限テイラー展開) 開区間 I において関数 $f(x) \in D^n(I)$ とする．$a \in I$ について

$$\forall x \in I\ (x \neq a), \exists \theta \in (0,1),\ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!}(x-a)^n.$$

この右辺を $x = a$ における n 次有限テイラー展開と呼ぶ．

例題　$\log x$ の $x = 1$ における有限テイラー展開を求めよ

マクローリン展開　$a = 0$ のときはテイラーの定理をマクローリンの定理といい，$x = 0$ における有限テイラー展開を有限マクローリン展開という．

例　e^x の有限マクローリン展開は $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{e^{\theta x}}{n!}x^n$

例　$\sin x$ の $2m$ 次の有限マクローリン展開は

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{\sin(\theta x)}{(2m)!}x^{2m}$$

ランダウの記号　a の近くに定義された 2 つの関数 $f(x), g(x)$ について

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ならば，

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a)$$

と書く．o はランダウの記号．

例　$f(x) = o(1) \quad (x \to a) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} f(x) = 0$

例　$\sin x = o(1),\ \cos x = 1 + o(x),\ \sin x = x + o(x^2) \quad (x \to 0)$

注意　$o(f(x))$ を式の中で書くことがあるが，普通の式ではない．特に左辺 (仮定) と右 (評価) で意味が違う．

- $o(x^2) = o(x) \ \Leftrightarrow\ \forall f,\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = 0$ が成り立つが $o(x) = o(x^2)$ は成り立たない．
- $o(f(x)) - o(f(x)) = o(f(x))$ が成り立つが $o(f(x)) - o(f(x)) = 0$ は成り立たない．

定理 2.4.4 $x \to 0$ のとき，以下が成り立つ．

(1) $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$　(2) $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$　(3) $m \le n \Rightarrow o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$

漸近展開　有限テイラー展開や有限マクローリン展開の中で剰余項に使われる導関数が有界なら，その剰余項が $o(x^{n-1})$ になる．そのための十分条件として，$f^{(n)}(x)$ が連続関数であればいい．

定理 2.4.5 $f \in C^n(I)$ とする $(0 \in I)$．

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + o(x^n).$$

同様に $x = a$ における展開が定義できる．

例　$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

例題　$e^x \sin x$ を $o(x^4)$ に近似しなさい．

問題の解答

2.3.3

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dx^2} &= (g(f(x)))'' = (g'(f(x))f'(x))' = g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))f''(x) \\ &= \frac{d^2z}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}\end{aligned}$$

宿題　2.4.1, 2.4.2, 2.4.3

中間テスト　6 月 18 日