高次の導関数

Jacques Garrigue, 2019 年 6 月 4 日

n 次の導関数　関数 $y = f(x)$ が区間 I で微分可能ならその導関数 $f'(x)$ が定義される．同様に関数 $f'(x)$ が I で微分可能なら，$f(x)$ の 2 次の導関数 $f''(x)$ が定義される．微分可能であ る限りそれが繰り返される．元の関数を $f^{(0)}(x) = f(x)$ とし，順番に $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = f''(x)$, $f^{(n+1)}(x) = \{f^{(x)}(x)\}'$. n 次の導関数の表記は様々．

$$y^{(n)},\ f^{(n)}x,\ \frac{d^n y}{dx^n},\ \frac{d^n f}{dx^n}$$

例題　$f(x) = x^3$ の全ての導関数を与えよ．

例　$\dfrac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin(x + n\dfrac{\pi}{2})$

例　$\dfrac{d^n e^x}{dx^n} = e^x,\ \dfrac{d^n a^x}{dx^n} = (\log a)^n a^x.$

D^n 級と C^n 級　関数 $f(x)$ が n 回微分可能なら，$f(x)$ が D^n であるという．また D^n な $f(x)$ について $f^{(n)}(x)$ が連続なら，$f(x)$ が C^n で n 回連続微分可能だという．区間 I で n 回微分可能な関数の集合は $D^n(I)$ で，n 回連続微分可能な関数の集合が $C^n(I)$．定義から $C^n(I) \subset D^n(I)$ で，微分可能性の条件から $D^{n+1}(I) \subset C^n$. また，無限回微分可能な関数を C^∞ という．

例　$x^n,\ \sin x,\ a^x\ (0 < a)$ はそれぞれ $C^\infty(\mathbf{R})$ である．

例　$f(x) = x|x|$ は C^1 だが D^2 ではない．

曲線の凹凸　$C : y = f(x)$ が $P(a, f(a))$ で接線 l をもつとする．P 以外で C の点が l の上なら，C が下に凸．P 以外で C の点が l の下なら，C が上に凸．P より左の C の点が l の下で，P より右の C の点が l の上なら，またはその逆のとき，P が C の変曲点．

定理 2.2.1 $f''(x)$ が a で連続とする．$f''(a) > 0$ ならば，$C : y = f(x)$ が点 $P(a, f(a)$ で下に凸 *($f''(a) < 0$ ならば上に凸)*．$f''(a) = 0$ で $f''(x)$ が a の前後で符号が変わるなら P が C の変曲点．

定理 2.2.2 $f'(a) = 0$ かつ $f''(x)$ が a で連続とする．$f''(a) > 0$ ならば $f(a)$ は極小値, $f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極大値．

定理 2.2.3 $f(x)$ が $[a, b]$ を含む開区間で *2* 回微分可能で，$f(a) < 0 < f(b)$ かつ $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$. さらに単調性より $f(x) = 0$ が $[a, b]$ でただ *1* つの解 α をもつ．

$$c_1 = b, \quad c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$$

が単調減少で α に収束する．

定理 2.2.4 (Leibniz の公式) 関数 f, g が開区間 I で n 回微分可能ならば，積 fg も $D^n(I)$ で，

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} g^k = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + \ldots + nf'g^{(n-1)} + fg^{(n)}$$

問題の解答

2.2.2

(1) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$ なので，$f'(0) = 0,\ \forall x < 0, f'(x) < 0,\ \forall x > 0, f'(x) > 0.$
$f(x)$ は連続で，$(-\infty, 0]$ で単調減少，$[0, \infty)$ で単調減少なので，$x = 0$ で極小値 -1 があるのみ.

(2) $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x| < 1$

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 1 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ \Leftrightarrow\ 1 - x^2 = x^2\ (x \geq 0) \ \Leftrightarrow\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f(x)$ は $[-1, 1]$ で連続で，$\forall x \in (-1, \frac{\sqrt{2}}{2}), f'(x) > 0, \forall x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1), f'(x) < 0$ なので，$[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ で単調増加，$[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ で単調減少で，$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で極大値 $\sqrt{2}$, $x = -1$ と $x = 1$ で極小値 -1 と 1.

2.2.3

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x-e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{-e^x} = 2$

(5) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \mathrm{Sin}^{-1}x}{x - x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x^2)^{-1/2}}{1-\cos x + x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x(1-x^2)^{-3/2}}{2\sin x + x\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(1-x^2)^{-3/2} - 3x^2(1-x^2)^{-5/2}}{3\cos x + x\sin x} = -\frac{1}{3}$$

(9) $$\lim_{x\to\infty} x^2 \log\left(1 + \frac{a}{x^2+x}\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^3}{2}\frac{-a\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}}{1+\frac{a}{x^2+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2} a \frac{2x+1}{(x^2+x+a)(x^2+x)} = a$$

宿題　2.3.1, 2.3.2, 2.3.3

中間テスト　6 月 18 日