関数の微分

Jacques Garrigue, 2019 年 5 月 21 日

微分係数　$a \in \mathbf{R}$ を含む区間で定義された関数 $f(x)$ の $x = a$ での微分係数は

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

この極限が存在するとき，$f(x)$ が $x = a$ で微分可能ともいう．

導関数　$y = f(x)$ が区間 I で微分可能ならば，各点での微分係数を返す関数を導関数といい，

$$y',\ f',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x) \quad \text{などと書く．}$$

また a での微分係数を

$$y'(a),\ f'(a),\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a},\ \frac{df}{dx}(a),\ \frac{df(a)}{da} \quad \text{などと書く．}$$

例　$\dfrac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1}\ (n > 0),\ \dfrac{d\sin x}{dx} = \cos x,\ \dfrac{d\cos x}{dx} = -\sin x,\ \dfrac{d\,e^x}{dx} = e^x$

例　$\dfrac{d\,|x|}{dx}$ は 0 定義されていない．

定理 2.1.1 (連続性) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば，$x = a$ で連続である．

接線　曲線 C 上の点 P での接線は P の近くの二つの C 上の点を結ぶ直線の点の距離が 0 に近付いたときの極限をいう．

定理 2.1.2 (接線) $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば，曲線 $C : y = f(x)$ の $P(a, f(a))$ における接線がただ一つ存在し，その方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

すなわち，$f'(a)$ は接線の傾斜を表している．

定理 2.1.3 (導関数の和，積，商) 関数 f, g が区間 I で微分可能ならば，$cf, f+g, fg, \dfrac{f}{g}$ も I で微分可能で，次をみたす *(ただし商のとき $g(x) = 0$ を除く)*

(1) $(cf)' = cf'$　　(2) $(f+g)' = f' + g'$

(3) $(fg)' = f'g + fg'$　　(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

例　$\dfrac{d\tan x}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

例題　$(fghr)'$ を計算せよ．

定理 2.1.4 (合成関数) 関数 $y=f(x)$ が区間 I で微分可能で，$z=g(y)$ が区間 J で微分可能とする．$f(I)\subset J$ ならば合成関数 $z=g(f(x))$ も区間 I で微分可能で，

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

または

$$(g\circ f)'=(g'\circ f)\cdot f' \quad \text{すなわち} \quad (g\circ f)'(x)=g'(y)f'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

例題 $\dfrac{d}{dx}e^{x\cos x}$ を計算せよ．

定理 2.1.5 (逆関数) 関数 $y=f(x)$ を区間 I で微分可能で単調な関数とする．$\forall y\in I, f'(x)\neq 0$ ならば，逆関数 $x=f^{-1}(y)$ が $J=f(I)$ で微分可能で

$$(f^{-1})'(y)=\frac{dx}{dy}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}=f'(x)^{-1}$$

例 $\dfrac{d\,\mathrm{Sin}^{-1}x}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (x\in(-1,1))$, $\dfrac{d\,\mathrm{Tan}^{-1}x}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}\ (x\in\mathbf{R})$, $\dfrac{d\log|x|}{dx}=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$

例題 (1) $\dfrac{d}{dx}x^a=ax^{a-1}\ (x>0, a\neq 0)$ (2) $\dfrac{d}{dx}a^x=(\log a)a^x\ (a>0)$
ヒント：$a^b=e^{b\log a}\ (a>0)$ を使う．

宿題 2.1.1, 2.1.4