

# 行列の簡約化

Jacques Garrigue, 2014 年 5 月 23 日

## 簡約な行列

**主成分** ある行の中で 0 でない最初の成分を**主成分**という. 行ベクトル  $\mathbf{a} = [a_1 \dots a_i \dots a_n]$  において,  $a_i$  が  $\mathbf{a}$  の主成分とは,  $a_i \neq 0$  かつ  $a_j = 0$  ( $j < i$ ) ということになる.

**簡約な行列** ある行列  $A = [a_{ij}]$  が**簡約**というには, 以下の条件を満たさなければならない.

- (I) 零ベクトルでない行の主成分が 1 である.
- (II) 各行の先頭の 0 の数が増えて行く. すなわち, 行  $i$  の主成分が  $a_{ik_i}$  だとすると, それより下の行は零ベクトルまたは主成分  $a_{jk_j}$  は  $k_i$  より右にある:  $j > i$  ならば  $k_j > k_i$ .
- (III) 主成分を含む列ベクトルの他の成分は全て 0 である.

### 例 簡約な行列の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**例題** 次の行列が簡約でない理由を考え, 基本変形により簡約な行列に変形せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**行列の簡約化** 以下の手続きによって, 任意の行列を簡約な行列に変形できる.

- (1) 零ベクトルでない各行を主成分で割る. (I) が満たされる.
- (2) 主成分の位置の順に行を並べ変える.
- (3) 同じ主成分の行が複数ある場合, 上の行をそれ以降の行から引き, (1) に戻る. なければ, (II) が満たされる.
- (4) ある行の主成分  $a_{ik_i} = 1$  の上に 0 でない成分  $a_{jk_i}$  ( $j < i$ ) が残っている場合,  $j$  行目から  $i$  行目の  $a_{jk_i}$  倍を引く.  
小さな  $i$  から始め, なくなるまで繰り返す. 終わると (III) が満たされる.

**例題** 上記の簡約化手続きを使い次の行列を簡約な行列に変形せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

**定理 1** 任意の行列は基本変形を繰り返すことにより簡約化できる. また, 与えられた行列の簡約かは唯一通り定まる.

**行列の階数** 行列  $A$  の簡約化を  $B$  とするとき,

$$\text{rank}(A) = B \text{ の零ベクトルでない行の個数}$$

とおき  $A$  の階数という. 簡約な行列の各行の主成分は全て異なる列に属するから

$$\text{rank}(A) = B \text{ の行の主成分を含む列の個数}$$

でもり, 従って

**定理 2**  $A$  が  $m \times n$  行列ならば,  $\text{rank}(A) \leq m$  かつ  $\text{rank}(A) \leq n$ .

**例題** 次の行列の階数を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$