

# 行列の分割

Jacques Garrigue, 2014 年 4 月 11 日

**分割** 計算や証明を簡単にするために、行列を縦横に小さな行列に分割することができる。各行列の幅と高さが縦と横で揃っていないなければならない。

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{st} \end{array} \right]$$

各行の高さ:  $m_1, m_2, \dots, m_s$   
各列の幅:  $n_1, n_2, \dots, n_t$   
 $A_{ij}$ :  $m_i \times n_j$  型  
 $A$ :  $\sum m_i \times \sum n_j$  型

例  $\left[ \begin{array}{c|c|c} 2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ \hline 5 & 3 & -9 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$   $A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_{21} = [5 \ 3]$ ,  $A_{22} = [-9]$

**分割行列の和と差** 同じように分割されている二つの行列の和と差は小行列ごとにすればいい。

$$[A_{ij}] + [B_{ij}] = [A_{ij} + B_{ij}] \quad [A_{ij}] - [B_{ij}] = [A_{ij} - B_{ij}]$$

**分割行列の積**  $A$  の横の分割と  $B$  の縦の分割が同じならば、 $A$  と  $B$  の積を小行列ごとに行うことができる。

$$AB = [A_{ij}][B_{jk}] = [C_{ik}]$$

$$A_{ij} : m_i \times n_j \text{ 型} \quad B_{jk} : n_j \times r_k \text{ 型} \quad C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + \dots + A_{it}B_{tk} : m_i \times r_k \text{ 型}$$

例  $A_1, B_1$  が  $m$  次正方行列,  $A_2, B_2$  が  $n$  次正方行列ならば

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} B_1 & O \\ \hline O & B_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_1B_1 & O \\ \hline O & A_2B_2 \end{array} \right]$$

例  $A$  が  $m \times n$  行列のとき

$$[E_m \mid -A] \left[ \begin{array}{c} A \\ \hline E_n \end{array} \right] = E_m A - A E_n = A - A = O_{m,n}$$

**ベクトル分割**  $A$  が  $m \times n$  行列ならば、それを  $m$  個の行ベクトルか  $n$  個の列ベクトルに分割することができる。

$$A = [ \mathbf{c}_1 \mid \dots \mid \mathbf{c}_n ] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{array} \right]$$

例  $\left[ \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \right] = [ \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2 ] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{r}_2 \end{array} \right]$   $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$   $\mathbf{r}_1 = [1 \ 2]$ ,  $\mathbf{r}_2 = [3 \ 4]$ ,

**ベクトル分割による積の表現**  $A$  が  $m \times n$  行列,  $B$  が  $n \times r$  行列のとき

$$AB = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{array} \right] [ \mathbf{b}_1 \mid \dots \mid \mathbf{b}_r ] = [\mathbf{a}_i \mathbf{b}_k]_{m \times r} = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_r \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_m \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \mathbf{b}_r \end{array} \right]$$