

# クラマーの公式と特別な行列式

Jacques Garrigue, 2014 年 7 月 18 日

## クラマーの公式

**定理 1**  $A$  が  $n$  次正方行列ならば, 連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

の解は次のように書ける.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i = \frac{\det[\vec{a}_1 \dots \vec{b} \dots \vec{a}_n]}{\det(A)}$$

$[\vec{a}_1 \dots \vec{b} \dots \vec{a}_n]$  は  $A$  の  $i$  列目を  $\vec{b}$  に置き換えた行列.

**証明**  $\vec{b} = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$  から

$$\begin{aligned} \det[\vec{a}_1 \dots \vec{b} \dots \vec{a}_n] &= x_1 \det[\vec{a}_1 \dots \vec{a}_1 \dots \vec{a}_n] + \dots + x_n \det[\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n \dots \vec{a}_n] \\ &= x_i \det[\vec{a}_1 \dots \vec{a}_i \dots \vec{a}_n] = x_i \det(A) \end{aligned}$$

## 特別な形の行列式

### ヴァンデルモンドの行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

### 多項式

$$F = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & -1 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$