

行列・ベクトル・演算

Jacques Garrigue, 2014 年 4 月 11 日

行列 $m \times n$ 個の数 a_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) を長方形に並べたものを m 行 n 列の行列, または $m \times n$ 行列という.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ または } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} は行列 A の (i, j) 成分である.

逆に, $A = [a_{ij}]$ や $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ というように, A を成分から定義することもある. 前者では i と j の範囲があらかじめ分からなければならない.

行列 A の上から i 番目の行は a_{ij} ($j = 1, \dots, n$) で構成される: $[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$

同様に, 行列 A の左から j 番目の列は a_{ij} ($i = 1, \dots, m$) で構成される:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

零行列 全ての成分が 0 の $m \times n$ 行列を零行列といい, $O_{m,n}$ と書く.

正方行列 行と列の数が等しい行列を正方行列という. $n \times n$ の正方行列を n 次正方行列ともいう.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ならば, a_{ii} ($i = 1, \dots, n$) の成分を対角成分という. 対角成分以外の成分が全て 0 ならば, A が対角行列だという.

対角成分が全て 1 の対角行列が単位行列である. E または E_n ($n \times n$ 行列の場合) と書く.

例えば, 3 次の単位行列は $E = E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である.

対角成分が全て等しい対角行列をスカラー行列という. 零行列や単位行列はスカラー行列である.

転置行列 行列 A の行と列を入れ替えた行列を A の転置行列といい, tA と書く.

$${}^t[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ji}]_{n \times m} \quad b_{ji} = a_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

A が $m \times n$ 行列ならば, tA は $n \times m$ 行列になる.

ベクトル $1 \times n$ 行列を n 次の行ベクトルという. 同様に $n \times 1$ 行列を n 次の列ベクトルという. 行ベクトルと列ベクトルを併せて数ベクトルという.

成分が全て 0 の数ベクトルを例ベクトルといい, $\mathbf{0}$ と書く.

例 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ のとき以下を求めよ

1. A の型 ($m \times n$ 行列の m と n)
2. A の $(2, 1)$ 成分
3. A の第 2 行, A の第 3 列
4. tA

行列の和と差 A と B がともに $m \times n$ 行列とする. $A + B$ および $A - B$ は各成分の和と差によって定義される.

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}] \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [d_{ij}] \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

行列のスカラー倍 A が行列で c が数 (スカラーともいう) のとき, A の c 倍 cA は A の全ての成分をその c 倍にした行列である: $c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$.

A がスカラー行列なら, ある a が存在し, $A = aE$.

行列の積 A が $m \times n$ 行列で B が $n \times r$ 行列のとき, A と B の積 AB は以下の通り定義される $m \times r$ 行列である. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times r}$ として,

$$AB = [a_{ij}]_{m \times n} [b_{jk}]_{n \times r} = [c_{ik}]_{m \times r} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, r)$$

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & b_{1k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{nk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ik} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + \dots + a_{in} b_{nk}$$

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

行列の演算に関する性質 左辺が定義されているとき, 以下の性質が成り立つ

和の性質 $A + B = B + A$ (可換律), $A + 0 = A$ (単位元),

$(A + B) + C = A + (B + C)$ (結合律)

積の性質 $AE = EA = A$ (単位元), $AO = O$, $OA = O$ (吸収元),

$(AB)C = A(BC)$ (結合律)

スカラー倍 $0A = O$, $1A = A$, $a(bA) = (ab)A$, $a(AB) = (aA)B$

分配率 $a(A + B) = aA + aB$, $(a + b)A = aA + bA$,

$A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$

転置 ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

例 A, B が正方行列とする. 以下の方程式が正しいかどうか調べよ.

1. $A^2 + 3E + 2E = (A + 2E)(A + E)$

2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

冪零行列 正方行列 A について, $A^m = O$ となるような m が存在すれば, A は冪零行列という.