アソシエーターと MOULD 理論

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
古庄　英和
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY
HIDEKAZU FURUSHO

Abstract. 多重ゼータ値の研究において Racinet ([R]) によって導入されたダブルシャッフル集合 DMR と Drinfeld ([D]) が導入したアソシエーターの集合 ASTR の定義及びそれらの関係について、mould 理論を用いた再定式化について説明する。この報告は広瀬稔氏と小見山尚氏との共同研究 [FHK] に基づいている。

1. 非可換形式的冪級数サイドでの定式化

この節では**非可換**形式的冪級数環の部分集合として定められるダブルシャッフル集合 DMR とアソシエーター集合 ASTR の定式化と二つの関係について知られていることを手短に復習する。

この二つは多重ゼータ値が満たす二つの重要な関係式、ダブルシャッフル関係式とアソシエーター関係式、で定義される集合である。この二つは性格も出自も全く異なる関係式であるがどちらも多重ゼータ値のすべての関係式を尽くすことが期待されており、とりわけこの二種の関係式は等価であることが期待されている。

1.1. DMR.

ダブルシャッフル集合 DMR とは Racinet ([R]) により導入された非可換形式的冪級数環の部分集合であり多重ゼータ値の満たすダブルシャッフル関係式より定められる。この定義を説明するためにいくつか記号を準備する：Γ を有限集合, $\mathfrak{f}_\Gamma$ を f_0, f_σ $(\sigma \in \Gamma)$ で生成された自由 $\mathbb{Q}$-リー代数とする。この普遍包絡代数の完備化 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ には自然に Hopf 代数の構造が入る。これの余積を Δ とおく。$\mathbb{Q}$-代数として $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ は非可換形式的冪級数代数 $\mathbb{Q}\langle\langle f_0, f_\sigma \bigm| \sigma \in \Gamma\rangle\rangle$ と同一視される。特に $\Gamma = \{1\}$ (一点集合) のとき、Racinet の記号に合わせて $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ を $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ と記すことにする。次に、$\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ を $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ で生成された非可換多項式環の次数による完備化とする。ここで次数は $\deg Y_k = k$ で入れる。$\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ には

$$\Delta_*(Y_n) := Y_n \otimes 1 + 1 \otimes Y_n + \sum_{i+j=n} Y_i \otimes Y_j \qquad (n \geq 1)$$

で余積を入れることにより Hopf 代数の構造が入る。$\mathbb{Q}$-線形な全射 $\pi_Y : \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \twoheadrightarrow \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ を

$$\pi_Y(W) := \begin{cases} Y_{k_1}\cdots Y_{k_r} & (W = f_1 f_0^{k_1-1}\cdots f_1 f_0^{k_r-1}), \\ 0 & (W : \text{その他}) \end{cases}$$

代数的整数論とその周辺 2023 講究録原稿.

で定める (これは Hopf 代数の準同型にならない)。各 $\varphi \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ に対して

$$\varphi_{\mathrm{corr}} := \exp\left(\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{\langle\varphi|f_1 f_0^{k-1}\rangle}{k} Y_1^k\right),$$
$$\varphi_* := \pi_Y(\varphi)\cdot\varphi_{\mathrm{corr}} \in \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$$

と定める。ここで $\langle\varphi|f_1 f_0^{k-1}\rangle$ とは φ の $f_1 f_0^{k-1}$ の係数のことである。

Definition 1 ([R]). ダブルシャッフル集合 DMR とは次の条件

- $\varphi(f_0, 0) = \varphi(0, f_1) = 1$
- $\Delta(\varphi) = \varphi \otimes \varphi$
- $\Delta_*(\varphi_*) = \varphi_* \otimes \varphi_*$

を満たす非可換形式的冪級数 $\varphi = \varphi(f_0, f_1) \in \mathbb{Q}\langle\langle f_0, f_1\rangle\rangle$ のなす集合のことである。各 $\mu \in \mathbb{Q}$ に対して $\langle\varphi|f_1 f_0\rangle = \frac{\mu^2}{24}$ なる DMR の元 φ の部分集合を DMR_μ と記すことにする。

この記号 DMR は double mélange et régularisation の頭文字から来ている。DMR_0 には非可換群の構造が入る。ダブルシャッフル群とはこの群 DMR_0 のことである。また各 DMR_μ には DMR_0 作用し、この作用により各 $\mu \in \mathbb{Q}$ に対して DMR_μ には DMR_0-torsor の構造が入ることが [R] で示されている。

KZ (Knizhnik-Zamolodchikov) 方程式の基本解を使って Drinfeld ([D]) が KZ アソシエーターと呼ばれる非可換形式的冪級数 $\Phi_{\mathrm{KZ}} \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ を構成している。これの各係数には多重ゼータ値が現れることが知られている。(cf. [LM], [F03])。この形式的冪級数 (正確にはこれの逆さ読み) が上の DMR の ($\mathbb{C}$-値) 点を与えることは多重ゼータ値がダブルシャッフル関係式を満たすことの言い換えになっている。

1.2. ASTR. 次に Drinfeld ([D]) によるアソシエーター集合 ASTR の定義を説明するためにいくつか記号を準備する：$n \geq 2$ とする。**無限小組紐リー代数** (別名: Drinfeld-Kohno リー代数) $\mathfrak{t}_n$ とは、生成元が $\{t_{ij}\}_{0\leq i,j<n}$ で与えられ

$$t_{ii} = 0, \quad t_{ij} = t_{ji}, \quad [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0, \quad [t_{ij}, t_{kl}] = 0 \quad (i, j, k, l : \text{みな異なる})$$

で関係式が与えられた次数付きリー代数のことである。

Definition 2 ([D, F10]). 非可換形式的冪級数 $\varphi = \varphi(f_0, f_1) \in \mathbb{Q}\langle\langle f_0, f_1\rangle\rangle$ が次のアソシエーター関係式

- $\varphi(f_0, 0) = \varphi(0, f_1) = 1$
- $\Delta(\varphi) = \varphi \otimes \varphi$
- $\varphi(t_{02} + t_{12}, t_{23})\varphi(t_{01}, t_{12} + t_{13}) = \varphi(t_{01}, t_{12})\varphi(t_{01} + t_{02}, t_{13} + t_{23})\varphi(t_{12}, t_{23})$

を満たすとき**アソシエーター**であるという。アソシエーター全体のなす集合を ASTR と記すことにする。

各 $\mu \in \mathbb{Q}$ に対して $\langle\varphi|f_1 f_0\rangle = \frac{\mu^2}{24}$ なる ASTR の元 φ の部分集合を ASTR_μ と記すことにする。

最後の定義式は五角形関係式と言われており、これは $\mathfrak{t}_4$ の普遍包絡代数の完備化 $\widehat{U\mathfrak{t}_4}$ 内での関係式として定式化されている。元来アソシエーターの定義には上の三関係式だけでなくさらに六角形関係式 (I, II) なる二つの関係式も含まれていたが、実はこの二関係式は上述の三関係式より従うので不要であることが [F10] で示されている。

アソシエーター関係式は幾何学的に解釈され、それより先の KZ アソシエーター Φ_{KZ} は ASTR の ($\mathbb{C}$-値) 点を定めることが従う。多重ゼータ値はこの Φ_{KZ} の各係数を書き下すのでこれより多重ゼータ値の代数的関係式が得られる。

ASTR_0 には非可換群の構造が入る。Grothendieck-Teichmüller 群とはこの ASTR_0 のことであり GRT_1 と書かれる。各 ASTR_μ にはこの GRT_1 が作用し、この作用により各 $\mu \in \mathbb{Q}$ に対して ASTR_μ には GRT_1-torsor の構造が入ることが [D] で示されている。詳細については [F14, FKN] なども参照されたい。

1.3. **相互関係.** 多重ゼータ値のダブルシャッフル関係式とアソシエーター関係式は等価であることが期待されているので、DMR と ASTR は一致していることが期待されている。これに関して以下が知られている。

Theorem 3 ([F11, EnF])**.** アソシエーター集合 ASTR はダブルシャッフル集合 DMR に部分集合として埋め込まれる：

$$\mathsf{DMR} \supset \mathsf{ASTR}$$

[F22] ではアソシエーター関係式と [HS] の合流関係式が同値であることが示されている。[HS] では合流関係式よりダブルシャッフル関係式が従うことが示されているのでこれからも Theorem 3 の主張が従う。一方で逆向きの埋め込み DMR ⊂ ASTR については未だ判っていない。

2. Mould サイドでの定式化

前節で説明したダブルシャッフル集合 DMR とアソシエーター集合 ASTR について [FHK] の mould 理論を用いた定式化を説明する。

2.1. **準備.** Moulds は J. Ecalle ([Ec81]) により導入された概念である。本報告では Schneps ([S15]) 流の定義を採用することにする。初めて勉強する人には [K20] を勧める。

Definition 4. $\mathcal{F} = \bigcup_{m\geq 0} \mathcal{F}_m$ を関数族 (正確な定義は [FHK] を参照), Γ を集合とする。無限族

$$M = \left(M\left(\begin{smallmatrix}x_1,\dots,x_m\\ \sigma_1,\dots,\sigma_m\end{smallmatrix}\right)\right)_{m\geqslant 0,\sigma_i\in\Gamma}$$

を **Γ-添字の mould** という。ただしここで $M\left(\begin{smallmatrix}x_1,\dots,x_m\\ \sigma_1,\dots,\sigma_m\end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{F}_m$ としている。Γ-添字の moulds 全体の集合 $\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ には以下の積写像により非可換 $\mathbb{Q}$-代数の構造が入る。

$$(A\times B)\left(\begin{smallmatrix}x_1,\dots,x_m\\ \sigma_1,\dots,\sigma_m\end{smallmatrix}\right) := \sum_{i=0}^{m} A\left(\begin{smallmatrix}x_1,\dots,x_i\\ \sigma_1,\dots,\sigma_i\end{smallmatrix}\right) B\left(\begin{smallmatrix}x_{i+1},\dots,x_m\\ \sigma_{i+1},\dots,\sigma_m\end{smallmatrix}\right).$$

この積に関する単位元 $1_{\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)} \in \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ は以下で与えられる。

$$1_{\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)}\left(\begin{smallmatrix}x_1,\dots,x_m\\ \sigma_1,\dots,\sigma_m\end{smallmatrix}\right) := \begin{cases} 1 & (m=0), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

また mould M が定数であるとは全ての成分が定数であるとき、即ち、$M\left(\begin{smallmatrix}x_1,\dots,x_m\\ \sigma_1,\dots,\sigma_m\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}$ であるときのことをいう。

Definition 5 ([S12])**.** **非可換**形式的冪級数 $h \in \mathbb{Q}\langle\langle f_0, f_\sigma \mid \sigma\in\Gamma\rangle\rangle$ が

$$h = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_r)\in\Gamma^r} \sum_{k_0,\dots,k_r\in\mathbb{N}_0} \left\langle h \,\middle|\, \begin{smallmatrix}k_0,\dots,k_r\\ \sigma_1,\dots,\sigma_r\end{smallmatrix}\right\rangle f_0^{k_0} f_{\sigma_1}\cdots f_{\sigma_r} f_0^{k_r}$$

と展開されたとき、**可換**形式的冪級数 $\mathsf{ma}^r_{\Gamma,h}\binom{x_1,\dots,x_r}{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\in\mathcal{F}_{\mathsf{ser},r}:=\mathbb{Q}[[x_1,\dots,x_r]]$ を

$$\mathsf{ma}^r_{\Gamma,h}\binom{x_1,\dots,x_r}{\sigma_1,\dots,\sigma_r}=\sum_{k_1,\dots,k_r\in\mathbb{N}_0}\left\langle h\,\middle|\,\begin{smallmatrix}0,k_1,\dots,k_r\\ \sigma_1,\dots,\sigma_r\end{smallmatrix}\right\rangle x_1^{k_1}(x_1+x_2)^{k_2}\cdots(x_1+\cdots+x_r)^{k_r}$$

で定め、mould $\mathsf{ma}_{\Gamma,h}\in\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathsf{ser}};\Gamma)$ （ここで $\mathcal{F}_{\mathsf{ser}}=\bigcup_{r\geqslant 0}\mathcal{F}_{\mathsf{ser},r}$）を

$$\mathsf{ma}_{\Gamma,h}=\left\{\mathsf{ma}^r_{\Gamma,h}\binom{x_1,\dots,x_r}{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\right\}_{r\geqslant 0,(\sigma_1,\dots,\sigma_r)\in\Gamma^r}$$

で定める。

同一視 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}\simeq\mathbb{Q}\langle\langle f_0,f_\sigma\mid\sigma\in\Gamma\rangle\rangle$ において、f_0 の係数を取ることにより誘導される $\mathbb{Q}$-線形写像を $e_0:\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}\to\mathbb{Q}$ とおく。$\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ の $\mathbb{Q}$-線形部分空間 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ を

$$\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger:=\{w\in\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}\mid(e_0\otimes\mathrm{id})\circ\Delta(w)=0\}$$

で定める。 $h\mapsto\mathsf{ma}_{\Gamma,h}$ の対応により $\mathbb{Q}$-代数の同型

$$\mathsf{ma}_\Gamma:\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger\xrightarrow{\simeq}\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathsf{ser}};\Gamma)$$

が誘導される (cf. [FHK])。

次に Sauzin([Sau]) により導入された dimoulds の概念を紹介する。

Definition 6. $\mathcal{F}=\bigcup_{m\geqslant 0}\mathcal{F}_m$ を関数族, Γ_1, Γ_2 を集合とする。無限族

$$M:=\left(M\binom{x_1,\dots,x_r;\,x_{r+1},\dots,x_{r+s}}{\sigma_1,\dots,\sigma_r;\,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}}\right)_{r,s\geqslant 0,\sigma_1,\dots,\sigma_r\in\Gamma_1,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}\in\Gamma_2},$$

を (Γ_1,Γ_2)**-添字の dimould** という。ただしここで $M\binom{x_1,\dots,x_r;\,x_{r+1},\dots,x_{r+s}}{\sigma_1,\dots,\sigma_r;\,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}}\in\mathcal{F}_{r+s}$ としている。(Γ_1,Γ_2)-添字の dimoulds 全体の集合 $\mathcal{M}_2(\mathcal{F};\Gamma_1,\Gamma_2)$ にも以下の積写像により非可換 $\mathbb{Q}$-代数の構造が入る。

$$\begin{aligned}&(A\times B)\binom{x_1,\dots,x_r;\,x_{r+1},\dots,x_{r+s}}{\sigma_1,\dots,\sigma_r;\,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}}\\&\qquad:=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}A\binom{x_1,\dots,x_i;\,x_{r+1},\dots,x_{r+j}}{\sigma_1,\dots,\sigma_i;\,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+j}}B\binom{x_{i+1},\dots,x_r;\,x_{r+j+1},\dots,x_{r+s}}{\sigma_{i+1},\dots,\sigma_r;\,\sigma_{r+j+1},\dots,\sigma_{r+s}}.\end{aligned}$$

この dimould の概念は Ecalle ([Ec03, Ec11]) による bimould の概念とは異なることに注意しておく。

以下の様に moulds のテンソル積を取ることで dimould が作れる。

$$i_\otimes:\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma_1)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma_2)\to\mathcal{M}_2(\mathcal{F};\Gamma_1,\Gamma_2)$$

$$i_\otimes(M\otimes N)\binom{x_1,\dots,x_r;\,x_{r+1},\dots,x_{r+s}}{\sigma_1,\dots,\sigma_r;\,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}}:=M\binom{x_1,\dots,x_r}{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\cdot N\binom{x_{r+1},\dots,x_{r+s}}{\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}}.$$

2.2. $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$. ダブルシャッフル集合 DMR の mould 版 $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$ について [S15, SS] に基づいて説明する。

まず moulds の shuffle 写像を定義するために以下の記号を準備する: 集合 $X_{\mathbb{Z}}$ を $X_{\mathbb{Z}}:=\{\binom{u}{\sigma}\mid u=a_1x_1+\cdots+a_kx_k,\ k\in\mathbb{N},\ a_j\in\mathbb{Z},\ \sigma\in\Gamma\}$ で定める。$X_{\mathbb{Z}}^\bullet$ を $X_{\mathbb{Z}}$ で生成された非可換自由モノイドとする。$\mathcal{A}_X$ を $X_{\mathbb{Z}}^\bullet$ を基底に持つ $\mathbb{Q}$-線形空間とする。$\mathcal{A}_X$ には

$$a\omega\ ⧢\ b\eta:=a(\omega\ ⧢\ b\eta)+b(a\omega\ ⧢\ \eta),$$

$(a,b\in X_{\mathbb{Z}},\,\omega,\eta\in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet})$ で定まる shuffle 積

$$\sqcup\!\sqcup : \mathcal{A}_X\times\mathcal{A}_X\to\mathcal{A}_X$$

により結合的可換 $\mathbb{Q}$-代数の構造が入る。各 $\omega,\eta,\alpha\in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}$ に対して整数 $\mathrm{Sh}\binom{\omega;\eta}{\alpha}$ を

$$\omega\ \sqcup\!\sqcup\ \eta=\sum_{\alpha\in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}}\mathrm{Sh}\begin{pmatrix}\omega;\eta\\ \alpha\end{pmatrix}\alpha.$$

で定める。

Definition 7. $\mathcal{F}$ を関数族, Γ を集合とする。shuffle 写像

$$\mathcal{Sh}=\mathcal{Sh}_{\Gamma}:\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)\to\mathcal{M}_2(\mathcal{F};\Gamma,\Gamma)$$

とは各 $M\in\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ に対して

$$\mathcal{Sh}(M):=\left(\sum_{\alpha\in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}}\mathrm{Sh}\begin{pmatrix}\binom{x_1,\ \dots,\ x_p}{\sigma_1,\ \dots,\ \sigma_p};\binom{x_{p+1},\ \dots,\ x_{p+q}}{\sigma_{p+1},\ \dots,\ \sigma_{p+q}}\\ \alpha\end{pmatrix}M(\alpha)\right)_{p,q\geqslant 0,\sigma_i\in\Gamma}$$

で定義される $\mathbb{Q}$-線型写像である。

この写像は代数準同型であることが [K21] で示されている。

Definition 8. Mould $M\in\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ が **symmetral** であるとは $\mathcal{Sh}(M)=M\otimes M$ かつ $M(\emptyset)=1$ であるときのことをいう。

$\mathcal{F}=\mathcal{F}_{\mathsf{ser}}$ のとき $M\in\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ が symmetral であることと $\mathsf{ma}_{\Gamma}^{-1}(M)\in\widehat{U\mathfrak{f}_{\Gamma}}^{\dagger}$ が group-like であることは同値になる (cf. [FHK])。

次に moulds の stuffle 写像を定義するために以下の記号を準備する: 集合 $Y_{\mathbb{Z}}$ を $Y_{\mathbb{Z}}:=\{\binom{\sigma}{u}\mid u=a_1x_1+\cdots+a_kx_k,\ k\in\mathbb{N},\ a_j\in\mathbb{Z},\ \sigma\in\Gamma\}$ で定める。$Y_{\mathbb{Z}}^{\bullet}$ を $Y_{\mathbb{Z}}$ で生成された非可換自由モノイドとする。$\mathcal{K}$ を $\mathcal{K}:=\mathbb{Q}(x_i\mid i\in\mathbb{N})$、すなわち $\mathbb{Q}$ 上 x_i 達 $(i\in\mathbb{N})$ で生成された可換体とする。$\mathcal{A}_Y$ を $Y_{\mathbb{Z}}$ で生成された $\mathcal{K}$-代数とする (よって $\mathcal{A}_Y$ は $Y_{\mathbb{Z}}^{\bullet}$ を基底に持つ $\mathcal{K}$-線型空間である)。$\mathcal{A}_Y$ には各 $\binom{\sigma}{v},\binom{\sigma'}{v'}\in Y_{\mathbb{Z}}$ $(v\neq v')$ と $\omega,\eta\in Y_{\mathbb{Z}}^{\bullet}$ に対して

$$\begin{aligned}\binom{\sigma}{v}\omega\ \sqcup\!\sqcup_*\ \binom{\sigma'}{v'}\eta:=\binom{\sigma}{v}\left(\omega\ \sqcup\!\sqcup_*\ \binom{\sigma'}{v'}\eta\right)+\binom{\sigma'}{v'}\left(\binom{\sigma}{v}\omega\ \sqcup\!\sqcup_*\ \eta\right)\\ +\frac{1}{v-v'}\left\{\binom{\sigma\sigma'}{v}(\omega\ \sqcup\!\sqcup_*\ \eta)-\binom{\sigma\sigma'}{v'}(\omega\ \sqcup\!\sqcup_*\ \eta)\right\}\end{aligned}$$

とすることで定まる stuffle 積

$$\sqcup\!\sqcup_*:\mathcal{A}_Y^{\otimes 2}\to\mathcal{A}_Y$$

により**非**結合的可換 $\mathbb{Q}$-代数の構造が入る。各 $\omega,\eta,\alpha\in Y_{\mathbb{Z}}^{\bullet}$ に対して $\mathrm{Sh}_*\binom{\omega;\eta}{\alpha}\in\mathcal{K}$ を

$$\omega\ \sqcup\!\sqcup_*\ \eta=\sum_{\alpha\in Y_{\mathbb{Z}}^{\bullet}}\mathrm{Sh}_*\begin{pmatrix}\omega;\eta\\ \alpha\end{pmatrix}\alpha$$

で定める。

Definition 9. $\mathcal{F}$ を可除な関数族 (cf. [FHK]), Γ を集合とする。stuffle 写像

$$\mathcal{Sh}_* = \mathcal{Sh}_{*,\Gamma} : \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{F};\Gamma) \to \overline{\mathcal{M}_2}(\mathcal{F};\Gamma,\Gamma)$$

とは各 $M \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{F};\Gamma)$ に対して

$$\mathcal{Sh}_*(M) := \left(\sum_{\alpha \in Y_{\mathbb{Z}}^{\bullet}} \mathrm{Sh}_* \left(\begin{matrix} \binom{\sigma_1,\ \dots,\ \sigma_p}{x_1,\ \dots,\ x_p} ; \binom{\sigma_{p+1},\ \dots,\ \sigma_{p+q}}{x_{p+1},\ \dots,\ x_{p+q}} \\ \alpha \end{matrix} \right) M(\alpha) \right)_{p,q \geqslant 0, \sigma_i \in \Gamma}$$

で定義される $\mathbb{Q}$-線型写像である。ここで $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{F};\Gamma)$ と $\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ は同じ集合であるが便宜上違う記号で表している。また $M \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{F};\Gamma)$ の各成分を $M\binom{x_1,\dots,x_m}{\sigma_1,\dots,\sigma_m}$ でなく $M\binom{\sigma_1,\dots,\sigma_m}{x_1,\dots,x_m}$ と記すことにしている。

この写像も代数準同型であることが [K21] で示されている。

Definition 10. Mould $M \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{F};\Gamma)$ が **symmetril** であるとは $\mathcal{Sh}_*(M) = M \otimes M$ かつ $M(\emptyset) = 1$ であるときのことを言う。

ダブルシャッフル集合 DMR の mould 版を説明するために以下を導入する：Γ を群とする。$\mathbb{Q}$-線型写像

$$\mathsf{swap} : \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma) \to \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{F};\Gamma)$$

を各 $M \in \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ に対して

$$\mathsf{swap}(M)\begin{pmatrix} \sigma_1, & \dots, & \sigma_m \\ x_1, & \dots, & x_m \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x_m, & x_{m-1}-x_m, & \dots, & x_2-x_3, & x_1-x_2 \\ \sigma_1\cdots\sigma_m, & \sigma_1\cdots\sigma_{m-1}, & \dots, & \sigma_1\sigma_2, & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

と定める。

Definition 11 (cf. [Ec03])**.** $\Gamma = [1] := \{1\}$(一点集合) のとき、symmetral でありかつある定数 mould C が取れて積 $C \times \mathsf{swap}(M)$ が symmetril になるような mould $M \in \mathcal{M}(\mathcal{F};[1])$ 全体のなす集合を $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$ と記す。特に $M\binom{x_1}{\sigma_1}$ が偶関数となるような M がなす $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$ の部分集合を $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\underline{\mathsf{as}}*\underline{\mathsf{is}}}$ とおく。

詳細な証明はどこに書かれてあるのか知らないが, $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\underline{\mathsf{as}}*\underline{\mathsf{is}}}$ は群構造を有し、さらに $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$ に群作用をしているようである (cf. [Ec03, Ec11])。

Theorem 12 ([S15])**.** *$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathsf{ser}}$, $\Gamma = [1]$ のとき Definition 5 の写像 ma_Γ により全単射*

$$\mathsf{DMR} \cdot \exp \mathbb{Q} f_1 \simeq \mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$$

が得られる。またこれの制限により全単射 $\mathsf{DMR}_0 \cdot \exp \mathbb{Q} f_1 \simeq \mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\underline{\mathsf{as}}*\underline{\mathsf{is}}}$ も得られる。

上の定理が $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$ が DMR の mould 版であるという所以である。

2.3. $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}}$. [FHK] において導入したアソシエーター集合 ASTR の mould 版 $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}}$ の定義と前小節の $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$ との関係について説明する。

$\epsilon_1, \dots, \epsilon_d$ を適当な複素数として次の可換形式的冪級数

$$I\binom{u_1,\ \dots,\ u_d}{\epsilon_1,\ \dots,\ \epsilon_d} := \int_{0<s_1<\cdots<s_d<1} \frac{s_1^{-u_1} ds_1}{\epsilon_1 - s_1} \wedge \cdots \wedge \frac{s_d^{-u_d} ds_d}{\epsilon_d - s_d} \in \mathbb{C}[[u_1,\dots,u_d]]$$

を考える。これは多重ポリログ関数

$$\mathsf{Li}_{n_1,\ldots,n_d}(z_1,\ldots,z_d) := \sum_{0<k_1<\cdots<k_d} \frac{z_1^{k_1}\cdots z_d^{k_d}}{k_1^{n_1}\cdots k_d^{n_d}}$$

を用いて

$$I\binom{u_1,\ \ldots,\ u_d}{\epsilon_1,\ \ldots,\ \epsilon_d} = \sum_{n_1,\ldots,n_d>0} \mathsf{Li}_{n_1,\ldots,n_d}(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},\ldots,\frac{\epsilon_d}{\epsilon_{d-1}},\frac{1}{\epsilon_d}) \cdot u_1^{n_1-1}(u_1+u_2)^{n_2-1}\cdots(u_1+\cdots+u_d)^{n_d-1}$$

とも書き表される。$\mathcal{O}=\mathcal{O}(\mathbb{D}^2)$ を二次元開円盤 $\mathbb{D}^2=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : |x|^2+|y|^2<1\}$ 上の複素解析関数のなす $\mathbb{C}$-代数とする。$[1]=\{1\}$, $[2]=\{1,2\}$ とする。 $d\geqslant 0$, $\sigma_1,\ldots,\sigma_d\in[2]$ に対して

$$\epsilon(\sigma)=\begin{cases} x & (\sigma=1),\\ xy & (\sigma=2)\end{cases}$$

とおくことで

$$\mathsf{Zag}^x\binom{u_1,\ldots,u_d}{1,\ldots,1} := (-1)^d I\binom{u_1,\ldots,u_d}{x^{-1},\ldots,x^{-1}},$$
$$\mathsf{Zag}^{xy,x}\binom{u_1,\ldots,u_d}{\sigma_1,\ldots,\sigma_d} := (-1)^d I\binom{u_1,\ldots,u_d}{\epsilon(\sigma_1)^{-1},\ldots,\epsilon(\sigma_d)^{-1}},$$

と定める。同様にして $\mathsf{Zag}^y\binom{u_1,\ldots,u_d}{1,\ldots,1}$ と $\mathsf{Zag}^{xy,y}\binom{u_1,\ldots,u_d}{\sigma_1,\ldots,\sigma_d}$ も定める。これにより定まる ‘mould’ も同じ記号で

$$\mathsf{Zag}^x,\mathsf{Zag}^y\in\mathcal{M}({}_{\mathcal{O}}\mathcal{F}_{\mathsf{ser}};[1]),\qquad \mathsf{Zag}^{xy,x},\mathsf{Zag}^{xy,y}\in\mathcal{M}({}_{\mathcal{O}}\mathcal{F}_{\mathsf{ser}};[2]).$$

と記すことにする。ここで ${}_{\mathcal{O}}\mathcal{F}_{\mathsf{ser}} := \mathcal{O}\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}}\mathcal{F}_{\mathsf{ser}}$ としている。これらのテンソル積をとることにより ‘dimoulds’

$$\mathsf{Zag}^x\otimes\mathsf{Zag}^{xy,y},\qquad \mathsf{Zag}^y\otimes\mathsf{Zag}^{xy,x}\in\mathcal{M}_2({}_{\mathcal{O}}\mathcal{F}_{\mathsf{ser}};[1],[2])$$

が定まる。[FHK] では

$$(\mathsf{id}_{\mathcal{O}}\otimes\mathsf{bal})(\mathsf{Zag}^y\otimes\mathsf{Zag}^{xy,x}) = \mathsf{Zag}^x\otimes\mathsf{Zag}^{xy,y}$$

となる (で一意に定まる) $\mathbb{Q}$-線形な対合写像

$$\mathsf{bal}:\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_{\mathsf{ser}};[1],[2])\to\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_{\mathsf{ser}};[1],[2])$$

が構成されている。

Definition 13 ([FHK])**.** Symmetral でありかつある定数 mould $C\in\mathcal{M}(\mathcal{F};[2])$ が取れて

$$\mathsf{bal}(M_{[1]}\otimes M_{[2]}) = M_{[1]}\otimes(M_{[2]}\times C)$$

となる mould $M\in\mathcal{M}(\mathcal{F};[1])$ 全体のなす集合を $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}}$ と記す。特に $M\binom{x_1}{\sigma_1}$ が偶関数となる M のなす $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}}$ の部分集合を $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\underline{\mathsf{as+bal}}}$ とおく。

$\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\underline{\mathsf{as+bal}}}$ が群構造を有しさらに $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}}$ に群作用をするかどうかは判っていない。

Theorem 14 ([FHK])**.** $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{\mathsf{ser}}$, $\Gamma=[1]$ のとき *Definition 5* の写像 ma_Γ により全単射

$$\mathsf{ASTR}\cdot\exp\mathbb{Q}f_1\simeq\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}}$$

が得られる。またこれの制限により全単射 $\mathsf{GRT}_1\cdot\exp\mathbb{Q}f_1\simeq\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\underline{\mathsf{as+bal}}}$ も得られる。

上の定理が $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}}$ が ASTR の mould 版であるという所以である。

Theorem 15 ([FHK])**.** 以下の埋め込みが存在する：

$$\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}} \hookrightarrow \mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$$

特に $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathsf{ser}}$ のとき、この埋め込みは *Theorem 3* の埋め込みと写像 ma_Γ を介して両立している*:*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{ASTR} \cdot \exp \mathbb{Q} f_1 \arrow[r, "\simeq", "\mathsf{ma}_\Gamma"'] \arrow[d, hook] & \mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}} \arrow[d, hook] \\ \mathsf{DMR} \cdot \exp \mathbb{Q} f_1 \arrow[r, "\simeq", "\mathsf{ma}_\Gamma"'] & \mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}} \end{tikzcd}$$

すなわち、上の図式は可換である。

この定理の証明で二変数多重ポリログ関数の関数関係式を用いている点は [F11] と共通している。

2.4. ASTR と DMR が一致していることが期待されていると先述したが、一般の $\mathcal{F}$ に対しても $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}}$ の像と $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$ はやはり一致していると期待すべきなのだろうか。

[Ec03] では $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*as}}$ という、言うなれば $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$ の深さ次数付け版、が導入されている。これは Goncharov ([G]) の二面体リー (余) 代数の研究に関わっている (cf. [FK], [KF])。この $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*is}}$ と $\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as*as}}$ を直に繋げる"dimorphic transport"の理論が [Ec03], [Ec11, §4.7] で展開されている。$\mathsf{GARI}(\mathcal{F})_{\mathsf{as+bal}}$ に対しても同様な理論が展開できるのだろうか。疑問が湧いてくるがどれも判らない。

2.5. Ecalle 氏の一連の論文 ([Ec81]-[Ec20]) は独特な"言語"で書かれており、この言語に慣れるまでにそれなりの労力を要する。この独特さに思わずアレルギー反応を起こしてしまうかもしれないが、時間をかけて向き合っていくと、この言語はじっくりと練り上げられておりたいへん納得のいくものであると気付かされる。同氏の 10 年、20 年前の論文でもアイデアや視点 (例えば [Ec03, §15] の Zag の三分割) が真新しく、論文が古くなっていない。私はまだ理論の僅かな部分しか解読できていないが、自分の理解がまだ及んでいないところに深く新しい数学が眠っていそうに思え興味が掻き立てられる。

謝辞：代数的整数論とその周辺 2023 にて講演の機会を提供してくださいました東京電機大学の千田雅隆氏に感謝いたします。本研究は JSPS 科研費 JP18H01110, JP20H00115, JP21H00969, JP21H04430 の助成を受けております。

References

[D] Drinfeld, V. G., *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860.

[Ec81] Ecalle, J., *Les fonctions résurgentes, Tome I et II*, Publications Mathématiques d'Orsay **81**, 6. Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, Orsay, 1981.

[Ec03] Ecalle, J., *ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas: un premier bilan*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), no. 2, 411–478.

[Ec04] Ecalle, J., *Multizetas, perinomal numbers, arithmetical dimorphy, and ARI/GARI*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, Tome XIII, no. 4 (2004), p. 683–708.

[Ec11] Ecalle, J., *The flexion structure and dimorphy: flexion units, singulators, generators, and the enumeration of multizeta irreducibles*, With computational assistance from S. Carr. CRM Series, **12**, Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation. Vol. II, 27–211, Ed. Norm., Pisa, 2011.

[Ec20] Ecalle, J., *The scrambling operators applied to multizeta algebra and singular perturbation analysis*, Algebraic combinatorics, resurgence, moulds and applications (CARMA). Vol. 2, 133–325, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **32**, EMS Publ. House, Berlin.

[EnF] Enriquez, B. Furusho, H., *The Betti side of the double shuffle theory. II. Double shuffle relations for associators*, Selecta Math. (N.S.) **29** (2023), issue no.1, article no. 3 (2023).

[F03] Furusho, H.; *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39**. no 4. (2003). 695–720.

[F10] Furusho, H., *Pentagon and hexagon equations*, Ann. of Math. (2) **171**, no. 1, 545–556, (2010).

[F11] Furusho, H., *Double shuffle relation for associators*, Ann. of Math. (2) **174**, no. 1, 341–360, (2011).

[F14] Furusho, H., *Around associators*, Automorphic forms and Galois representations, 2, 105-117, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **415** (2014), Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[F22] Furusho, H., *The pentagon equation and the confluence relations*, Amer. J. Math. **144**, no 4, 873–894, (2022).

[FHK] Furusho, H., Hirose, M. and Komiyama, N., *Associators in mould theory*, preprint, `arXiv:2312.15423`.

[FKN] 古庄英和 (著) ; 小谷久寿, 新甫洋史 (述) ; 結び目と Grothendieck-Teichmüller 群, MI lecture note series, vol. **68**, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 2016 年 2 月.

[FK] Furusho, H., Komiyama, N., *Kashiwara-Vergne and dihedral bigraded Lie algebras in mould theory*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 32 (2023), no. 4, 655–725.

[G] Goncharov, A. B., *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0,\infty\} \cup \mu_N))$, Duke Math. J. **110** (2001), no. 3, 397–487.

[HS] *Iterated integrals on* $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty,z\}$ *and a class of relations among multiple zeta values*, Advances in Mathematics **348** 163–182, 2019.

[K20] 小見山尚, Mould 理論入門, 数理解析研究所講究録 **2160** (2020), 126-170.

[K21] Komiyama, N., *On properties of* $\mathsf{adari}(\mathsf{pal})$ *and* $\mathsf{ganit}(\mathsf{pic})$, arXiv:2110.04834.

[KF] 小見山尚, 古庄英和, Mould 理論と Kashiwara-Vergne Lie 代数 I, II, リーマン面に関連する位相幾何学 2022 : 予稿集, 94–99, 126–130.

[LM] Le, T.Q.T. and Murakami, J.; *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. **142** (1996), 39–65.

[R] Racinet, G., *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **95** (2002), 185–231.

[SS] Salerno, A., Schneps, L., *Mould theory and the double shuffle Lie algebra structure*, Periods in Quantum Field Theory and Arithmetic, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol **314** (2020), Springer, 399–430.

[Sau] Sauzin, D., *Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials*, Renormalization and Galois theories, 83–163, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **15**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

[S12] Schneps, L., *Double shuffle and Kashiwara-Vergne Lie algebras*, J. Algebra **367** (2012), 54–74.

[S15] Schneps, L., *ARI, GARI, ZIG and ZAG: An introduction to Ecalle's theory of multiple zeta values*, `arXiv:1507.01534`, preprint.

〒 464-8602 名古屋市千種区不老町名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Email address: `furusho@math.nagoya-u.ac.jp`