The double shuffle relations for p-adic multiple zeta values

(joint work with Amnon Besser)

古庄　英和(名大多元数理)

E-mail : furusho@math.nagoya-u.ac.jp

要旨 本稿はA. Besser氏との共著論文[BF]についての解説記事です。第1章では($\mathbb{C}$の場合の)多重ゼータ値とそのdouble shuffle relationを簡単に復習します。第2章ではp進多重ゼータ値を紹介しそれに対するdouble shuffle relationの証明を与えます。最後に講演では一切ふれられませんでしたが、別証を紹介いたします。

第1章　多重ゼータ値とdouble shuffle relation

多重ゼータ値とはindex $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_m)$ $(m, k_1,\dots,k_m\in\mathbb{N})$ に対して

$$\zeta(k_1,\dots,k_m)=\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_m\\ n_i\in\mathbb{N}}}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_m^{k_m}} \qquad (1)$$

で定義される実数である。これは $k_m>1$ のときに限って収束する。とくに $m=1$ のときはRiemann zeta値 $\zeta(k)$ になっている。

多重ゼータ値はこの様に簡単に定義されるのにも関らず、$\mathbb{Z}$上の混合Tateモチーフの数論幾何学と関連したり結び目不変量や量子群の研究、数理物理学にも現れてきたりと幅広い研究対象であることが私にはとても魅力的です。

さて上の表示を用いることにより次の多重ゼータ値の積和公式が得られる。(即ち、多重ゼータ値で生成される$\mathbb{Q}$線型空

間($\subseteq \mathbb{R}$)は積構造を有している。

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{a}=(a_1,\cdots,a_k),\ \mathbb{b}=(b_1,\cdots,b_l) \quad (a_k>1,\ b_l>1) \text{ としたとき} \\ \zeta(\mathbb{a})\cdot\zeta(\mathbb{b})=\displaystyle\sum_{\sigma\in Sh^S(k,l)}\zeta(\sigma(\mathbb{a},\mathbb{b})) \end{array}}$$

これを多重ゼータ値の series shuffle product formula という。

ただし

$$Sh^S(k,l)=\bigcup_{N}\left\{\begin{array}{l} \text{集合間の射 } \sigma:\{P_1,\cdots,P_k,Q_1,\cdots,Q_l\}\longrightarrow\{R_1,\cdots,R_N\} \\ \text{s.t.・両者に } P_1<\cdots<P_k,\ Q_1<\cdots<Q_l,\ R_1<\cdots<R_N \\ \quad\text{で順序を入れたとき } X<Y\Rightarrow\sigma(X)<\sigma(Y) \\ \quad\text{が成り立っている。} \\ \text{・}\sigma\text{は全射(従って各}R_k\text{の逆像は1つか2つ)} \end{array}\right\}$$

$$\sigma(\mathbb{a},\mathbb{b})=(c_1,\cdots,c_{N_\sigma})\quad(N_\sigma=N)$$

$$c_i=\begin{cases} a_s+b_t & \text{if } \sigma^{-1}(R_i)=\{P_s,Q_t\} \\ a_s & \text{if } \sigma^{-1}(R_i)=\{P_s\} \\ b_t & \text{if } \sigma^{-1}(R_i)=\{Q_t\} \end{cases}$$ としている。

上式の各 $\zeta(\sigma(\mathbb{a},\mathbb{b}))$ は多重ゼータ値になっていることを注意しておく。

e.g. $k=l=1$ のとき $\zeta(a)\cdot\zeta(b)=\zeta(a,b)+\zeta(b,a)+\zeta(a+b)$

$k=1,\ l=2$ のとき $\zeta(a)\cdot\zeta(b,c)=\zeta(a,b,c)+\zeta(b,a,c)+\zeta(b,c,a)+\zeta(a+b,c)+\zeta(b,a+c)$

一方で、多重ゼータ値には次の様な反復積分表示がある。

$$\zeta(k_1,\cdots,k_m)=I_t\int_0^1\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}\circ\frac{dt}{1-t}}_{k_m}\circ\frac{dt}{t}\circ\cdots\cdots\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}\circ\frac{dt}{1-t}}_{k_1}\qquad(2)$$

$\left(\begin{array}{l} I_t\int_0^s\omega_n\circ\cdots\circ\omega_1=\int_0^s\omega_n(t)\int_0^t\omega_{n-1}\circ\cdots\circ\omega_1 \quad (\omega_i:\text{1次微分形式}) \\ \text{で帰納的に定義される積分を反復積分という。} \end{array}\right)$

反復積分は次の積和公式を満たすことが知られている。

$W = \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_k$, $W' = \omega_1' \circ \cdots \circ \omega_\ell'$ とかいたとき

$$It\int_0^1 W \cdot It\int_0^1 W' = \sum_{\tau \in Sh(k,\ell)} It\int_0^1 \tau(W, W')$$ が成り立つ。

ここで

$$Sh(k,\ell) = \left\{ \begin{array}{l} \text{集合間の射 } \tau : \{P_1, \cdots, P_k, Q_1, \cdots, Q_\ell\} \longrightarrow \{R_1, \cdots, R_{k+\ell}\} \\ \text{s.t. } \cdot \tau \text{ は全単射} \\ \quad \cdot \text{両者に } P_1 < \cdots < P_k,\ Q_1 < \cdots < Q_\ell,\ R_1 < \cdots < R_{k+\ell} \\ \quad \text{で順序を入れたときに } X < Y \Rightarrow \tau(X) < \tau(Y) \end{array} \right\}$$

$$\sigma(W, W') = \omega_1^\tau \circ \omega_2^\tau \circ \cdots \omega_{k+\ell}^\tau$$

$$\omega_i^\tau = \begin{cases} \omega_s & \text{if } \tau^{-1}(R_i) = P_s \\ \omega_t' & \text{if } \tau^{-1}(R_i) = Q_t \end{cases}$$ としている。

これを先の多重ゼータ値の反復積分表示に適用することにより、以下の多重ゼータ値の integral shuffle product formula が得られる。

$$\boxed{\zeta(\mathbf{a}) \cdot \zeta(\mathbf{b}) = \sum_{\tau \in Sh(N_{\mathbf{a}}, N_{\mathbf{b}})} It\int_0^1 \tau(W_{\mathbf{a}}, W_{\mathbf{b}})}$$

ここで $N_{\mathbf{a}} = a_1 + \cdots + a_k$, $N_{\mathbf{b}} = b_1 + \cdots + b_\ell$

$$W_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{dt}{t} \circ \cdots \circ \frac{dt}{t} \circ \frac{dt}{1-t}}_{a_k} \circ \frac{dt}{t} \circ \cdots \circ \frac{dt}{1-t} \circ \underbrace{\frac{dt}{t} \circ \cdots \circ \frac{dt}{t} \circ \frac{dt}{1-t}}_{a_1}$$

$$W_{\mathbf{b}} = \underbrace{\frac{dt}{t} \circ \cdots \circ \frac{dt}{t} \circ \frac{dt}{1-t}}_{b_\ell} \circ \frac{dt}{t} \circ \cdots \circ \frac{dt}{1-t} \circ \underbrace{\frac{dt}{t} \circ \cdots \circ \frac{dt}{t} \circ \frac{dt}{1-t}}_{b_1}$$

としている。

上式の各 $It\int_0^1 \tau(W_{\mathbf{a}}, W_{\mathbf{b}})$ は多重ゼータ値になっていることを注意しておく。

e.g. $k = \ell = 1$ のとき $\zeta(a) \cdot \zeta(b) = \sum_{i=0}^{a-1} \binom{b-1+i}{i} \zeta(a-i, b+i) + \sum_{j=0}^{b-1} \binom{a-1+j}{j} \zeta(b-j, a+j)$.

多重ゼータ値の series shuffle product formula と integral shuffle product formula をつなげて得られるのが、次の double shuffle relation である。

$$\boxed{\sum_{\sigma \in Sh^*(k,\ell)} \zeta(\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \sum_{\tau \in Sh(N_{\mathbf{a}}, N_{\mathbf{b}})} It\int_0^1 \tau(W_{\mathbf{a}}, W_{\mathbf{b}})}$$

e.g. $k=l=1$ のとき $\zeta(a,b)+\zeta(b,a)+\zeta(a+b)=\sum_{i=0}^{a-1}\binom{b-1+i}{i}\zeta(a-i,b+i)+\sum_{j=0}^{b-1}\binom{a-1+j}{j}\zeta(b-j,a+j)$.

第2章 p進多重ゼータ値とdouble shuffle relation

p進多重ゼータ値とは、筆者が導入した多重ゼータ値のp進類似物である。p進の世界では残念なことに無限和(1)は収束しないので$\mathbb{C}$-caseのときと同様に簡単に多重ゼータ値の定義を与えることはできない。筆者は[F2]においてColemanのp進反復積分理論を用いて(2)のp進類似

$$\mathrm{Col}\,\mathrm{Itk}\int_0^1 \underbrace{\frac{dx}{x}\circ\cdots\circ\frac{dx}{x}\circ\frac{dx}{1-x}}_{k_m}\circ\frac{dx}{x}\circ\cdots\cdots\circ\frac{dx}{1-x}\circ\underbrace{\frac{dx}{x}\circ\cdots\circ\frac{dx}{x}\circ\frac{dx}{1-x}}_{k_1}$$

を考え、これが$k_m>1$のとき$\mathbb{Q}_p$内で必ず収束することを示し、この値をp進多重ゼータ値$\zeta_p(k_1,\dots,k_m)$ $(k_m>1)$の定義とした。従ってp進多重ゼータ値とは反復積分表示はあるが巾級数表示のないp進数なのである。

[F1]では上のp進反復積分表示を用いてp進多重ゼータ値の間にintegral shuffle product formula

$$\boxed{\zeta_p(a)\cdot\zeta_p(b)=\sum_{\tau\in Sh(N_a,N_b)}\mathrm{Col}\,\mathrm{Itk}\int_0^1\tau(W_a,W_b)}$$

が成り立っていることを示した。

次にseries shuffle product formulaの方であるが、これは$\mathbb{C}$の場合では多重ゼータ値の巾級数表示を用いて示されていたのだがp進の場合だとp進多重ゼータ値には巾級数表示がないのでこの式のvalidityは非自明になってしまう。(実は、貴方はこれを

証明しましたかという手紙をDelligneさんより頂き大変恐縮いたしました。) p進多重ゼータ値はp級数表示がないのにも関らず series shuffle product formula を満たしているというのが[BF]の主結果である。

<u>Theorem</u>　p進多重ゼータ値は series shuffle product formula を満たす。

即ち index $\mathbb{a}=(a_1,\cdots,a_k)$, $\mathbb{b}=(b_1,\cdots,b_\ell)$ $(a_i,b_j\in\mathbb{N},\ a_k>1,\ b_\ell>1)$ に対して

$$\boxed{\zeta_p(\mathbb{a})\cdot\zeta_p(\mathbb{b})=\sum_{\sigma\in Sh^s(k,\ell)}\zeta_p(\sigma(\mathbb{a},\mathbb{b}))}$$

が成り立つ。

<u>Proof</u> <u>Step 1</u>

$$\mathcal{L}i_{\mathbb{a}}(x)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_k}\frac{x^{m_k}}{m_1^{a_1}\cdots m_k^{a_k}},$$

$$\mathcal{L}i_{\mathbb{a}\mathbb{b}}(x,y)=\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_k\\<n_1<\cdots<n_\ell}}\frac{x^{m_k}\cdot y^{n_\ell}}{m_1^{a_1}\cdots m_k^{a_k}\cdot n_1^{b_1}\cdots n_\ell^{b_\ell}}$$

とおく。

これらは、$|x|_p<1$, $|y|_p<1$ で収束する関数であり、この領域内で

$$\mathcal{L}i_{\mathbb{a}}(x)\cdot\mathcal{L}i_{\mathbb{b}}(y)=\sum_{\sigma\in Sh^s(k,\ell)}\mathcal{L}i^{\sigma}_{\mathbb{a}\mathbb{b}}(x,y)\quad\text{———}\quad(\star)$$

の成り立つことが簡単な計算で確められる。

(ここで、$\mathcal{L}i^{\sigma}_{\mathbb{a}\mathbb{b}}(x,y)=\displaystyle\sum_{(m_1,\cdots,m_k,n_1,\cdots,n_\ell)\in Z^{\sigma}_{+}}\frac{x^{m_k}\cdot y^{n_\ell}}{m_1^{a_1}\cdots m_k^{a_k}n_1^{b_1}\cdots n_\ell^{b_\ell}}$

$$Z^{\sigma}_{+}=\left\{(m_1,\cdots,m_k,n_1,\cdots,n_\ell)\in\mathbb{N}^{k+\ell}\ \middle|\ \begin{array}{l}\bullet\ m_1<\cdots<m_k\\ \bullet\ n_1<\cdots<n_\ell\\ \bullet\ \sigma(P_i)<\sigma(Q_j)\Rightarrow m_i<n_j\\ \bullet\ \sigma(P_i)=\sigma(Q_j)\Rightarrow m_i=n_j\\ \bullet\ \sigma(P_i)>\sigma(Q_j)\Rightarrow m_i>n_j\end{array}\right\}$$

とおいている。)

<u>e.g</u> $k=\ell=1$ のとき　$\mathcal{L}i_a(x)\cdot\mathcal{L}i_b(y)=\mathcal{L}i_{a,b}(x,y)+\mathcal{L}i_{b,a}(y,x)+\mathcal{L}i_{a+b}(xy)$.

さて①の場合だとこの後、$x\to1$, $y\to1$ とすることにより $\zeta(\mathbb{a})\zeta(\mathbb{b})=\displaystyle\sum_{\sigma\in Sh^s(k,\ell)}\zeta(\sigma(\mathbb{a},\mathbb{b}))$ が得られるがp進の場合ではそうはいかない。

Step2 Coleman関数

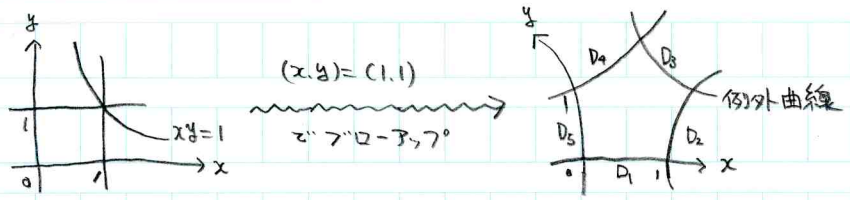
先の $\mathcal{L}i_{\alpha}(x)$ と $\mathcal{L}i_{\alpha\beta}(x,y)$ の満たす微分関係式 (cf. [BF] §4) をみてやることにより、これらは Coleman関数として

$$M_{0,5}(\mathbb{C}_p) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}_p) \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\ x \neq 0,1 \\ \cdot\ y \neq 0,1 \\ \cdot\ xy \neq 1 \end{array} \right\}$$

全体に解析接続される。このときに必要となるのが Besser氏による Colemanの p進反復積分論の高次元化 [B] である。

さて、そこで $x \to 1$, $y \to 1$ としたいのだが、$M_{0,5}(\mathbb{C}_p)$ は $(x,y)=(1,1)$ の所では divisors $\{x=1\}, \{y=1\}, \{xy=1\}$ が正規交差してなくてやりにくかったので次の様にブローアップしてみた。

Step3 記号の設定



上の $M_{0,5}$ のブローアップの図で出てくる因子をそれぞれ $D_1=\{y=0\}$, $D_2=\{x=1\}$, D_3:例外因子, $D_4=\{y=1\}$, $D_5=\{x=0\}$ と記し、各 D_i $(i=1,\cdots,5)$ の normal bundle を $\mathcal{N}_{D_i}$ と記す。

そして $\mathcal{N}_{D_i}^{\times} = \mathcal{N}_{D_i} - \{0\text{-section}\}$ とおく。

Step4 relative tangential basepoint

ここの部分が一番 theoretical な部分にあたる。[BF] §2 では、relative tangential basepoint の話を展開した。これはここでの状況だと、具体的には次の図式がフロベニウスの作用 ϕ_{crys} もこれで可換

であるということである。

$$\begin{tikzcd}
\phi_{\mathrm{amp}}\circlearrowright \pi_1^{p,\mathrm{rig}}(\mathcal{N}_{D_i}^{\times}) \arrow[r] \arrow[d, "S"', "\text{B.O.}"] & \phi_{\mathrm{amp}}\circlearrowright \pi_1^{p,\mathrm{rig}}(\mathcal{M}_{05}) \arrow[d, "\text{B.O.}", "S"'] & \text{tangential morphism} \\
\mathbb{Q}_p\times \pi_1^{DR}(\mathcal{N}_{D_i}^{\times}) \arrow[r] & \mathbb{Q}_p\times \pi_1^{DR}(\mathcal{M}_{05}) & \text{tangential morphism}
\end{tikzcd}$$

これを用いると、$\mathcal{M}_{05}(\mathbb{C}_p)$ の Coleman 関数は $\mathcal{N}_{D_i}^{\times}(\mathbb{C}_p)$ にまでも解析接続をすることができるようになる。

Step 5 restriction

L_i を $\mathcal{N}_{D_i}$ における '1-section'（D_i の高さ 1 への持上げ）とする。[BF] §5 では、Coleman 関数 $\mathcal{L}i_{\mathbb{a}}(x)$, $\mathcal{L}i_{\mathbb{b}}(y)$, $\mathcal{L}i_{\mathbb{a}\mathbb{b}}(x,y)$, $\mathcal{L}i_{\mathbb{b}\mathbb{a}}(y,x)$, $\mathcal{L}i_{\mathbb{c}}(xy)$（ここで $\mathbb{c}=(c_1,\dots,c_m)$）を $\mathcal{M}_{05}(\mathbb{C}_p)\sqcup\bigcup_{i=1}^{5}\mathcal{N}_{D_i}^{\times}(\mathbb{C}_p)$ に解析接続して、

L_1 に制限すると $\mathcal{L}i_{\mathbb{b}}(y)$ は constant で値 0 をとる

$\mathcal{L}i_{\mathbb{a}\mathbb{b}}(x,y)$ は constant で値 0 をとる

$\mathcal{L}i_{\mathbb{c}}(xy)$ は constant で値 0 をとる

L_2 に制限すると $\mathcal{L}i_{\mathbb{b}}(y)$ は $\mathcal{L}i_{\mathbb{b}}(\cdot)$ になる

$\mathcal{L}i_{\mathbb{a}\mathbb{b}}(x,y)$ は $a_k>1$ のとき $\mathcal{L}i_{\mathbb{a}\mathbb{b}}(\cdot)$ になる

$\mathcal{L}i_{\mathbb{c}}(xy)$ は $\mathcal{L}i_{\mathbb{c}}(\cdot)$ になる

L_3 に制限すると $\mathcal{L}i_{\mathbb{a}}(x)$ は $a_k>1$ のとき constant で値 $\zeta_p(\mathbb{a})$ をとる

$\mathcal{L}i_{\mathbb{b}}(y)$ は $b_\ell>1$ のとき constant で値 $\zeta_p(\mathbb{b})$ をとる

$\mathcal{L}i_{\mathbb{a}\mathbb{b}}(x,y)$ は $a_k>1$, $b_\ell>1$ のとき constant で値 $\zeta_p(\mathbb{a},\mathbb{b})$ をとる

$\mathcal{L}i_{\mathbb{b}\mathbb{a}}(y,x)$ は $a_k>1$, $b_\ell>1$ のとき constant で値 $\zeta_p(\mathbb{b},\mathbb{a})$ をとる

$\mathcal{L}i_{\mathbb{c}}(xy)$ は $c_m>1$ のとき constant で値 $\zeta_p(\mathbb{c})$ をとる

L_4 に制限すると $\mathcal{L}i_{\mathbf{a}}(x)$ は $\mathcal{L}i_{\mathbf{a}}(\cdot)$ になる

$\mathcal{L}i_{\mathbf{ba}}(y,x)$ は $b_\ell > 1$ のとき $\mathcal{L}i_{\mathbf{ba}}(\cdot)$ になる

$\mathcal{L}i_{\mathbf{c}}(xy)$ は $\mathcal{L}i_{\mathbf{c}}(\cdot)$ になる

L_5 に制限すると $\mathcal{L}i_{\mathbf{a}}(x)$ は constant で値 0 をとる

$\mathcal{L}i_{\mathbf{ba}}(y,x)$ は constant で値 0 をとる

$\mathcal{L}i_{\mathbf{c}}(xy)$ は constant で値 0 をとる

ことを示した。

Step6　そこで式(※)を Coleman 関数として $\mathcal{M}_{os}(\mathbb{C}_p) \sqcup \bigcup_{i=1}^{5} \mathcal{N}_{D_i}^{\times}(\mathbb{C}_p)$ にまで解析接続したものを考える。この式を直線 L_3 に制限すると、$a_k>1$, $b_\ell>1$ のとき Step5 よりすべての項が constant になり、p 進多重ゼータ値の series shuffle product formulae が得られる。(QED)

これを先の p 進多重ゼータ値の integral shuffle product formulae と組み合わせることにより次の系も得られる。

Corollary　p 進多重ゼータ値は double shuffle relation を満たす。

即ち、index $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_k)$, $\mathbf{b}=(b_1,\dots,b_\ell)$ $(a_i, b_j \in \mathbb{N},\ a_k>1,\ b_\ell>1)$ に対して

$$\boxed{\sum_{\sigma \in Sh^{\mathbb{Z}}(k,\ell)} \zeta_p(\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \sum_{\tau \in Sh(N_{\mathbf{a}},N_{\mathbf{b}})} \mathrm{Col}\, I_t \int_0^1 \tau(W_{\mathbf{a}}, W_{\mathbf{b}})}$$

が成り立つ。

Remark　今までの証明は p 進の世界だけでなく $\mathbb{C}$-case でも適用可能である。

最後に p 進多重ゼータ値の double shuffle relation の別証明について説明する。

[別証明] Terasoma により Grothendieck-Teichmüller 群の定義方程式 2-, 3-, 5-cycle relation ([F0] 参照) より double shuffle relation の従うことが示されている。従って p 進多重ゼータ値が 2-, 3-, 5-cycle relation を満たしていることを示せば double shuffle relations の別証が得られる。これら 3 関係式の証明法は (少くとも) 2 通りある。

1つ目　$\mathcal{M}_{04}(\mathbb{C}_p)=\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)\setminus\{0,1,\infty\}$ 上の p 進 KZ 方程式の基本解を考える。$\mathcal{M}_{04}$ の対称性を用いると p 進 Drinfel'd associator (p 進多重ゼータ値を係数にもつ非可換 2 変数形式的巾級数) の 2-, 3-cycle relation が得られる。Step 4 で説明した relative tangential base point の概念を $\mathcal{M}_{05}(\mathbb{C}_p)$ 上の p 進 KZ 方程式の基本解に適用し $\mathcal{M}_{05}$ の対称性を用いることにより p 進 Drinfel'd associator の 5-cycle relation が得られる。

2つ目　Deligne は筆者とは異なったやり方で p 進多重ゼータ値の定義を与えている [De]。(実は定義だけでなく値自身も一致していない。) Unver [U] は Deligne 流の p 進多重ゼータ値が 2-, 3-, 5-cycle relation を満たすことを示している。Deligne 流の p 進多重ゼータ値と筆者の p 進多重ゼータ値の間にはある種非常に explicit な関係が存在する [F2]。この explicit な関係を用いると Deligne 流の p 進多重ゼータ値の 3 関係式の validity より筆者の p 進多重ゼータ値の 3 関係式の validity が従う。 //

最後ですがこの研究集会で発表の機会を与えて下さった橋本喜一朗・小松啓一両先生に感謝します。

参考文献

[B] Besser, A.; Coleman integration using the Tannakian formalism, Math Ann 322, 1, 19-48, 2002

[BF] Besser, A. and Furusho, H.; The double shuffle relations for p-adic multiple zeta values, arXiv: math. NT/0310177, 2003.

[D] Deligne, P.; Periods for the Fundamental Group, a short note on Arizona Winter School 2002, available from http://swc.math.arizona.edu/~swcenter/notes/files/02DelignePD.dvi

[F0] Furusho, H.; Multiple zeta values and Grothendieck-Teichmüller groups, RIMS preprint 1357, 2002.

[F1] ———; p-adic multiple zeta values I, Inv Math 155, 253-286, 2002

[F2] ———; p-adic multiple zeta values II, in preparation

[U] Unver, S.; Drinfel'd-Ihara relations for the crystalline Frobenius, arXiv: math. NT/0310386, 2003.