

Grothendiek-Teichmüller 群

名大多元 古庄 英和

ABSTRACT. 有理数体 Q 上の絶対ガロア群 $G_Q = \text{Gal}(\overline{Q}/Q)$ が Grothendiek-Teichmüller 群 \widehat{GT} に埋め込まれることの証明 [I2] を解説する。

0. はじめに

Belyi の定理により G_Q は射影直線引く 3 点の代数的基本群

$$\widehat{F}_2 = \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{01})$$

に忠実に作用する (ここで $\vec{01}$ は tangential base point のこと)。即ち

$$G_Q \hookrightarrow \text{Aut} \widehat{F}_2$$

という埋め込みがある。

Grothendiek-Teichmüller 群 \widehat{GT} とは $\text{Aut} \widehat{F}_2$ の部分群であり、次の様に定義される。

$$\widehat{GT} = \left\{ \sigma \in \text{Aut} \widehat{F}_2 \left| \begin{array}{l} \text{各 } \sigma \text{ に対して一意に決まる } \lambda_\sigma \in \widehat{\mathcal{Z}}^\times \text{ と } f_\sigma \in [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2] \text{ があつ} \\ \text{て、} \\ \widehat{F}_2 \text{ の生成元 } x, y \text{ に} \\ \sigma(x) = x^{\lambda_\sigma}, \sigma(y) = f_\sigma^{-1} y^{\lambda_\sigma} f_\sigma \\ \text{と作用する。そして } \lambda_\sigma, f_\sigma \text{ は} \\ \text{2-cycle relation,} \\ \text{3-cycle relation,} \\ \text{5-cycle relation} \\ \text{を満たす。} \end{array} \right. \right\}.$$

これが実際に群をなすことは [IM] に説明されている。

この稿では、上の埋め込みにおけるガロア像が \widehat{GT} に埋め込まれることの証明を、[I1], [I2] の方針に従って説明する。

Grothendiek-Teichmüller 群 \widehat{GT} は元来 Drinfel'd [Dr] により導入されたものであり、上記の事項は全て implicit だが [Dr] に書かれていることを付記しておく。

$$\begin{array}{ccc}
G_Q & \hookrightarrow & \widehat{\text{Aut}F_2} \\
& & \cup \\
& & \widehat{GT}
\end{array}$$

1. G_Q が \widehat{GT} に埋め込まれることの証明

埋め込み $\overline{Q} \hookrightarrow C$ を 1 つ fix しておく。

tangential base point ([De]§15) の構成法より単射

$$\widehat{\pi}_1(T_0^\times; \overrightarrow{01}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01})$$

(T_0 : 0 における接空間、 $T_0^\times = T_0 \setminus \{0\}$) が定まる。これは Galois equivariant である。同一視

$$\widehat{\pi}_1(T_0^\times; \overrightarrow{01}) \simeq \pi_1^{\text{top}}(T_0^\times(C); \overrightarrow{01})^\wedge$$

により、0 の周りを正の向きに一周まわる $T_0(C)$ のループが定める $\widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01})$ の元を x とおく。

同一視

$$\widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}) \simeq \pi_1^{\text{top}}(\mathbf{P}^1(C) \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})^\wedge$$

について考える。 $\pi_1^{\text{top}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})$ は 1 点集合であり、埋め込み

$$\pi_1^{\text{top}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}) \hookrightarrow \pi_1^{\text{top}}(\mathbf{P}^1(C) \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})$$

により、 $\widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})$ の元が定まる。このパスを p と書くことにする。

tangential base point ([De]§15) の構成法より単射

$$\widehat{\pi}_1(T_0^\times; \overrightarrow{10}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{10})$$

(T_1 : 1 における接空間) が定まる。これは Galois equivariant である。同一視

$$\widehat{\pi}_1(T_1^\times; \overrightarrow{10}) \simeq \pi_1^{\text{top}}(T_1^\times(C); \overrightarrow{10})^\wedge$$

により、1 の周りを正の向きに一周まわる $T_0^*(C)$ のループが定める $\widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{10})$ の元を y' とおく。これに上のパス p を共役にかけることにより、 $\widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01})$ の元 $y = p^{-1}y'p$ ができる。 $\widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01})$ が x と y との 2 元により生成された自由群の副有限完備化であることは見易い。

Lem 1. $\sigma \in G_Q$ としたとき、

$$\sigma(x) = x^{\chi(\sigma)} \quad (\chi: \text{円分指標})$$

である。

証明 . $\widehat{\pi}_1(T_0^\times; \vec{01}) \simeq \widehat{Z}(1)$ であることより従う。 □

Lem 2. $\sigma \in G_Q$ とせよ。

$$f_\sigma := p^{-1}\sigma(p) \in \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}^1_Q \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{01})$$

とおくと、

$$\sigma(y) = f_\sigma^{-1}y^{\chi(\sigma)}f_\sigma$$

である。

証明 . 上と同様にして

$$\sigma(y') = y'^{\chi(\sigma)}$$

である。これより

$$\begin{aligned} \sigma(y) &= \sigma(p^{-1}y'p) = \sigma(p^{-1})\sigma(y')\sigma(p) \\ &= f_\sigma^{-1}y'^{\chi(\sigma)}f_\sigma = f_\sigma^{-1}y^{\chi(\sigma)}f_\sigma \end{aligned}$$

が出る。 □

Lem 3. $\sigma \in G_Q$ としたとき、

$$f_\sigma \in [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2] \quad (:\widehat{F}_2 \text{ の topological commutator})$$

である。

証明 . $\mathbf{P}^1_Q \setminus \{0, 1, \infty\}$ のアーベル被覆への f_σ の作用をみることで簡単に確かめられる。 □

Lem 4. $\sigma \in G_Q$ に対して、

$$f_\sigma(x, y)f_\sigma(y, x) = 1 \quad ((2\text{-cycle relation}))$$

が成り立つ¹。

証明 .

$$\theta : \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}^1_Q \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{01}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}^1_Q \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{10}),$$

$$\theta : \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}^1_Q \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{01}, \vec{10}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}^1_Q \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{10}, \vec{01}),$$

を、

$$\mathbf{P}^1_Q \setminus \{0, 1, \infty\} \longrightarrow \mathbf{P}^1_Q \setminus \{0, 1, \infty\}$$

$$t \longmapsto 1 - t$$

¹群準同型 $\Phi : \widehat{F}_2 \rightarrow H$ に対して、 $g \in \widehat{F}_2$ の像 $\Phi(g)$ を $g(\Phi(x), \Phi(y))$ と書くことにしている。

により誘導される射とすると、

$$\theta(x) = py p^{-1}, \quad \theta(y) = px p^{-1}$$

であり、また

$$\theta(p)p = 1 \quad \begin{array}{ccc} \times & \xrightarrow{\mathbf{p}} & \times \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\theta(\mathbf{p})} & \mathbf{1} \end{array}$$

である。これに σ を作用させることにより、

$$\begin{aligned} 1 &= \sigma(\theta(p)p) = \sigma(\theta(p))\sigma(p) = \theta(\sigma(p))\sigma(p) \\ &= \theta(pf_\sigma)pf_\sigma = \theta(p)\theta(f_\sigma)pf_\sigma \\ &= \theta(p)f_\sigma(\theta(x), \theta(y))pf_\sigma = \theta(p)pf_\sigma(y, x)p^{-1}pf_\sigma \\ &= f_\sigma(y, x)f_\sigma(x, y) \end{aligned}$$

が出る。 □

Lem 5. $\sigma \in G_Q$ に対して、 $m_\sigma = \frac{\chi(\sigma) - 1}{2}$, $z = (xy)^{-1}$ とおくと、

$$f_\sigma(z, x)z^{m_\sigma}f_\sigma(y, z)y^{m_\sigma}f_\sigma(x, y)x^{m_\sigma} = 1 \quad ((3\text{-cycle relation}))$$

が成り立つ。

証明 . $\pi_1^{\text{top}}(T_1^\times(\mathbf{C}); \vec{10}, \vec{1\infty})$ において原点の周りを時計回りに半周するパスが埋め込み

$$\pi_1^{\text{top}}(T_1^\times(\mathbf{C}); \vec{10}, \vec{1\infty}) \hookrightarrow \pi_1^{\text{top}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{10}, \vec{1\infty})$$

により定める $\widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{10}, \vec{1\infty})$ の元を、 r と書くことにする。

$$r^{-1}\sigma(r) = \theta(x)^{m_\sigma}$$

である。 $q = rp$ とおくと、

$$\begin{aligned} q^{-1}\sigma(q) &= p^{-1}r^{-1}\sigma(r)\sigma(p) \\ &= p^{-1}\theta(x)^{m_\sigma}pp^{-1}\sigma(p) \\ &= y^{m_\sigma}p^{-1}\sigma(p) = y^{m_\sigma}f_\sigma \end{aligned} \quad \begin{array}{ccc} \times & \xrightarrow{\mathbf{p}} & \times \\ \mathbf{0} & & \mathbf{1} \\ & & \text{r} \end{array}$$

となる。

$$\omega : \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{01}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{1\infty}),$$

$$\omega : \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{01}, \vec{1\infty}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{1\infty}, \vec{\infty 0}),$$

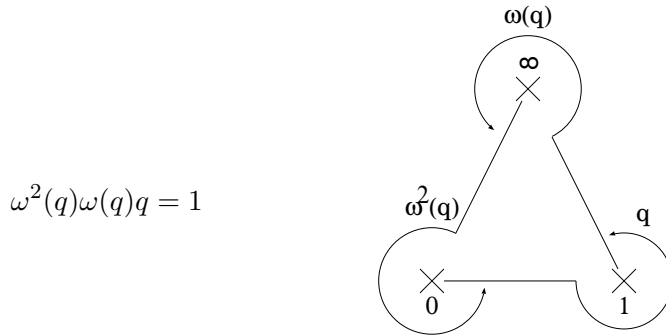
を、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1, \infty\} &\longrightarrow \mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1, \infty\} \\ t &\longmapsto \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

により誘導される射とすると、

$$\begin{aligned} \omega(x) &= qyq^{-1}, & \omega^2(x) &= \omega(q)qzq^{-1}\omega(q)^{-1} \\ \omega(y) &= qzq^{-1}, & \omega^2(y) &= \omega(q)qxq^{-1}\omega(q)^{-1} \\ \omega(z) &= qxq^{-1}, & \omega^2(z) &= \omega(q)qyq^{-1}\omega(q)^{-1} \end{aligned}$$

であり、



が成り立っている。これに σ を作用させることにより、

$$\begin{aligned} 1 &= \sigma(\omega^2(q)\omega(q)q) = \sigma(\omega^2(q))\sigma(\omega(q))\sigma(q) \\ &= \omega^2(\sigma(q))\omega(\sigma(q))\sigma(q) \\ &= \omega^2(qy^{m_\sigma}f_\sigma)\omega(qy^{m_\sigma}f_\sigma)qy^{m_\sigma}f_\sigma \\ &= \omega^2(q)\omega(q)qx^{m_\sigma}q^{-1}\omega(q)^{-1}\omega^2(f_\sigma)\omega(q)qz^{m_\sigma}q^{-1}\omega(f_\sigma)qy^{m_\sigma}f_\sigma \\ &= x^{m_\sigma}q^{-1}\omega(q)^{-1}f_\sigma(\omega(q)qzq^{-1}\omega(q)^{-1}, \omega(q)qxq^{-1}\omega(q)^{-1}) \\ &\quad \omega(q)qz^{m_\sigma}q^{-1}f_\sigma(qyq^{-1}, qzq^{-1})qy^{m_\sigma}f_\sigma(x, y) \\ &= x^{m_\sigma}q^{-1}\omega(q)^{-1}\omega(q)qf_\sigma(z, x)q^{-1}\omega(q)^{-1}\omega(q)qz^{m_\sigma}q^{-1}qf_\sigma(y, z)q^{-1}qy^{m_\sigma}f_\sigma(x, y) \\ &= x^{m_\sigma}f_\sigma(z, x)z^{m_\sigma}f_\sigma(y, z)y^{m_\sigma}f_\sigma(x, y) \end{aligned}$$

が出る。 □

次に 5-cycle relation について解説する。これはちと面倒で、 \mathbf{P}^1 上の 5 点のモジュライ空間

$$\mathcal{M}_{0,5} = \{(z_1, \dots, z_5) \in (\mathbf{P}^1)^5 \mid z_i \neq z_j (i \neq j)\} / \text{PGL}(2)$$

を用いる。(ちなみに $\mathcal{M}_{0,5} \simeq \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ である。)

$\mathcal{M}_{0,5}$ の 5 点を次の様に入れ換えることにより 5 次対称群の作用が定まる。

$$(x_1, \dots, x_5) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(5)}) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_5)$$

[I2] では 2 変数 Puiseux 級数を用いて \mathfrak{S}_5 対称な tangential base point P_0 が構成されており、これを基点とした基本群 $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{M}_{0,5}; P_0)$ は $\mathcal{P}_5^* = \mathcal{P}_5/(\text{center})$ (\mathcal{P}_5 : 5 本純組紐群) と同一視され、standard generator $x_{ij} (1 \leq i, j \leq 5)$ で生成される。

[I2] Proposition 2.5 は次の様に言い換えられる。 $(1\ 3\ 5\ 2\ 4) \in \mathfrak{S}_5$ が定める $\text{Aut}\mathcal{M}_{0,5}$ の元を c とする。

Lem 6. 自然な埋め込み

$$\tau : \widehat{\pi}_1(\mathbf{P}_Q^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{01}, \vec{10}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathcal{M}_{0,5}; P_0, c(P_0))$$

があり、これは Galois equivariant になっている。

この lemma より、 $\tau(p) = l$ とおくと、

$$l^{-1}\sigma(l) = \tau(p^{-1}\sigma(p)) = \tau(f_\sigma)$$

であることが分かる。 $\tau(x) = x_{45}, \tau(y) = x_{34}$ であることを使うと、

$$l^{-1}\sigma(l) = f_\sigma(x_{45}, x_{34})$$

となる。

Lem 7. $\sigma \in G_Q$ に対して、

$$f_\sigma(x_{12}, x_{23})f_\sigma(x_{34}, x_{45})f_\sigma(x_{51}, x_{12})f_\sigma(x_{23}, x_{34})f_\sigma(x_{45}, x_{51}) = 1 \quad \text{in } \widehat{\mathcal{P}}_5^*$$

((5-cycle relation))

が成り立つ。

証明 . 記号の乱用だが、

$$c^i : \widehat{\pi}_1(\mathcal{M}_{0,5}; P_0, c(P_0)) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(\mathcal{M}_{0,5}; c^i(P_0), c^{i+1}(P_0))$$

を、自己同型 $c^i : \mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{0,5} (1 \leq i \leq 5)$ より誘導される射とする。 $\widehat{\pi}_1(\mathcal{M}_{0,5}; P_0)$ において

$$(*) \quad c^4(l)c^3(l)c^2(l)c(l)l = 1$$

が成り立っていることが確かめられる。

$$\begin{aligned}
\sigma(c(l)) &= c(l)lf_{\sigma}(x_{12}, x_{51})l^{-1} \\
\sigma(c^2(l)) &= c^2(l)c(l)lf_{\sigma}(x_{34}, x_{23})l^{-1}c(l)^{-1} \\
\sigma(c^3(l)) &= c^3(l)c^2(l)c(l)lf_{\sigma}(x_{51}, x_{45})l^{-1}c(l)^{-1}c^2(l)^{-1} \\
\sigma(c^4(l)) &= c^4(l)c^3(l)c^2(l)c(l)lf_{\sigma}(x_{23}, x_{12})l^{-1}c(l)^{-1}c^2(l)^{-1}c^3(l)^{-1}
\end{aligned}$$

Lem. 4 と Lem. 5 と同様にして、(★) に $\sigma \in G_Q$ を作用させることにより、

$$\begin{aligned}
1 &= \sigma(c^4(l)c^3(l)c^2(l)c(l)l) \\
&= \sigma(c^4(l))\sigma(c^3(l))\sigma(c^2(l))\sigma(c(l))\sigma(l) \\
&= c^4(l)c^3(l)c^2(l)c(l)lf_{\sigma}(x_{23}, x_{12})l^{-1}c(l)^{-1}c^2(l)^{-1}c^3(l)^{-1} \cdot \\
&\quad c^3(l)c^2(l)c(l)lf_{\sigma}(x_{51}, x_{45})l^{-1}c(l)^{-1}c^2(l)^{-1} \cdot \\
&\quad c^2(l)c(l)lf_{\sigma}(x_{34}, x_{23})l^{-1}c(l)^{-1} \cdot \\
&\quad c(l)lf_{\sigma}(x_{12}, x_{51})l^{-1} \cdot \\
&\quad lf_{\sigma}(x_{45}, x_{34}) \\
&= c^4(l)c^3(l)c^2(l)c(l)l \cdot \\
&\quad f_{\sigma}(x_{23}, x_{12})f_{\sigma}(x_{51}, x_{45})f_{\sigma}(x_{34}, x_{23})f_{\sigma}(x_{12}, x_{51})f_{\sigma}(x_{45}, x_{34}) \\
&= f_{\sigma}(x_{23}, x_{12})f_{\sigma}(x_{51}, x_{45})f_{\sigma}(x_{34}, x_{23})f_{\sigma}(x_{12}, x_{51})f_{\sigma}(x_{45}, x_{34})
\end{aligned}$$

2-cycle relation より

$$\begin{aligned}
&= f_{\sigma}(x_{12}, x_{23})^{-1}f_{\sigma}(x_{45}, x_{51})^{-1}f_{\sigma}(x_{23}, x_{34})^{-1}f_{\sigma}(x_{51}, x_{12})^{-1}f_{\sigma}(x_{34}, x_{45})^{-1} \\
&= (f_{\sigma}(x_{34}, x_{45})f_{\sigma}(x_{51}, x_{12})f_{\sigma}(x_{23}, x_{34})f_{\sigma}(x_{45}, x_{51})f_{\sigma}(x_{12}, x_{23}))^{-1}
\end{aligned}$$

となり、5-cycle relation を導き出すことができる。 \square

Lem. 1 ~ Lem. 7 を併せると、

$$G_Q \hookrightarrow \widehat{GT}$$

であることが従う。

(証明終)

2. 最後に

§1 で G_Q が \widehat{GT} へ単射で埋め込まれることをみたが、この埋め込みが全射であるかどうか、即ち $G_Q = \widehat{GT}$ かどうか、は未だに分かっておらず、基本的な未解決問題である。

現在の所、 G_Q が \widehat{GT} 内で満たす様々な他の関係式が発見されている ([I3], [LNS], [NS], [NT], etc.) が、それらはいずれも 2-, 3-, 5-cycle relation から導き出せない真に新しい関係式かどうか定かでなく、 $G_Q \neq \widehat{GT}$ を決定付けるには至っていない。

参考文献

- [De] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in “Galois groups over \mathbf{Q} ”, Y. Ihara, K. Ribet, J.-P. Serre (eds.), MSRI Publ. 16, 79–297, Springer-Verlag, 1989.
- [Dr] V. G. Drinfel’d, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely related with $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Leningrad J. 2 (1991), 829–860.
- [I1] Y. Ihara, Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, Proc. ICM (Kyoto, 1990), 99–120.
- [I2] Y. Ihara, On the embedding of $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ into \widehat{GT} , in “The Grothendieck theory of dessins d’enfants”, L. Schneps (ed.), London Math. Soc. Lec. Note Ser. 200, 289–321, Cambridge, 1994.
- [I3] Ihara, Y., On beta and gamma functions associated with the Grothendieck-Teichmüller modular group II, J. reine und angew. Math. 527 (2000), 1–11.
- [IM] Y. Ihara, M. Matsumoto, On Galois actions on profinite completion of braid groups, in “Recent developments in the inverse Galois problem”, M. Fried et al. (eds.), Contemp. Math. 186, 173–200, Amer. Math. Soc., 1995.
- [LNS] P. Lochak, H. Nakamura, L. Schneps, On a new version of the Grothendieck-Teichmüller group, C. R. Acad. Sci. Paris 325 Ser. I (1997), 11–16.
- [NS] H. Nakamura, L. Schneps, On a subgroup of the Grothendieck-Teichmüller group acting on the tower of profinite Teichmüller modular groups, Invent. Math. 141 (2000), no. 3, 503–560.
- [NT] H. Nakamura, H. Tsunogai, Harmonic and equianharmonic equations in the Grothendieck-Teichmüller group, Forum. Math. 15(6) (2003), 877–892.