# Grothendieck-Teichmüller 群

名大多元　古庄 英和

Abstract. 有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上の絶対ガロア群 $G_{\boldsymbol{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ が Grothendieck-Teichmüller 群 $\widehat{GT}$ に埋め込まれることの証明 [I2] を解説する。

## 0. はじめに

Belyĭの定理により $G_{\boldsymbol{Q}}$ は射影直線引く 3 点の代数的基本群

$$\widehat{F_2} = \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01})$$

に忠実に作用する (ここで $\overrightarrow{01}$ は tangential base point のこと)。即ち

$$G_{\boldsymbol{Q}} \hookrightarrow \mathrm{Aut}\widehat{F_2}$$

という埋め込みがある。

Grothendieck-Teichmüller 群 $\widehat{GT}$ とは $\mathrm{Aut}\widehat{F_2}$ の部分群であり、次の様に定義される。

$$\widehat{GT} = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}\widehat{F_2} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{各 } \sigma \text{ に対して一意に決まる } \lambda_\sigma \in \widehat{\boldsymbol{Z}}^\times \text{ と } f_\sigma \in [\widehat{F_2}, \widehat{F_2}] \text{ があっ} \\ \text{て、} \\ \widehat{F_2} \text{ の生成元 } x, y \text{ に} \\ \qquad\qquad \sigma(x) = x^{\lambda_\sigma},\ \sigma(y) = f_\sigma^{-1} y^{\lambda_\sigma} f_\sigma \\ \text{と作用する。そして } \lambda_\sigma, f_\sigma \text{ は} \\ \qquad\qquad \text{2-cycle relation,} \\ \qquad\qquad \text{3-cycle relation,} \\ \qquad\qquad \text{5-cycle relation} \\ \text{を満たす。} \end{array} \right\}.$$

これが実際に群をなすことは [IM] に説明されている。

この稿では、上の埋め込みにおけるガロア像が $\widehat{GT}$ に埋め込まれることの証明を、[I1],[I2] の方針に従って説明する。

Grothendieck-Teichmüller 群 $\widehat{GT}$ は元来 Drinfel'd[Dr] により導入されたものであり、上記の事項は全て implicit だが [Dr] に書かれていることを付記しておく。

---

2004 年整数論サマースクール「基本群と Galois 表現」報告集原稿.

$$\begin{array}{ccc} G_{\boldsymbol{Q}} & \hookrightarrow & \mathrm{Aut}\widehat{F_2} \\ & \searrow & \cup \\ & & \widehat{GT} \end{array}$$

## 1. $G_{\boldsymbol{Q}}$ が $\widehat{GT}$ に埋め込まれることの証明

埋め込み $\overline{\boldsymbol{Q}} \hookrightarrow \boldsymbol{C}$ を 1 つ fix しておく。

tangential base point ([De]§15) の構成法より単射

$$\widehat{\pi_1}(T_0^{\times}; \overrightarrow{01}) \longrightarrow \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01})$$

($T_0$: 0 における接空間、$T_0^{\times} = T_0 \smallsetminus \{0\}$) が定まる。これは Galois equivariant である。同一視

$$\widehat{\pi_1}(T_0^{\times}; \overrightarrow{01}) \simeq \pi_1^{\mathrm{top}}(T_0^{\times}(\boldsymbol{C}); \overrightarrow{01})^{\wedge}$$

により、0 の周りを正の向きに一周まわる $T_0(\boldsymbol{C})$ のループが定める $\widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01})$ の元を $x$ とおく。

同一視

$$\widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}) \simeq \pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbf{P}^1(\boldsymbol{C}) \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})^{\wedge}$$

について考える。$\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbf{P}^1(\boldsymbol{R}) \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})$ は 1 点集合であり、埋め込み

$$\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbf{P}^1(\boldsymbol{R}) \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}) \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbf{P}^1(\boldsymbol{C}) \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})$$

により、$\widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})$ の元が定まる。このパスを $p$ と書くことにする。

tangential base point ([De]§15) の構成法より単射

$$\widehat{\pi_1}(T_0^{\times}; \overrightarrow{10}) \longrightarrow \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{10})$$

($T_1$: 1 における接空間) が定まる。これは Galois equivariant である。同一視

$$\widehat{\pi_1}(T_1^{\times}; \overrightarrow{10}) \simeq \pi_1^{\mathrm{top}}(T_1^{\times}(\boldsymbol{C}); \overrightarrow{10})^{\wedge}$$

により、1 の周りを正の向きに一周まわる $T_0^{*}(\boldsymbol{C})$ のループが定める $\widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{10})$ の元を $y'$ とおく。これに上のパス $p$ を共役にかけることにより、$\widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01})$ の元 $y = p^{-1}y'p$ ができる。$\widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \smallsetminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01})$ が $x$ と $y$ との 2 元により生成された自由群の副有限完備化であることは見易い。

**Lem 1.** $\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ としたとき、

$$\sigma(x) = x^{\chi(\sigma)} \qquad (\chi : \text{円分指標})$$

である。

**証明．** $\widehat{\pi_1}(T_0^\times;\overrightarrow{01}) \simeq \widehat{\boldsymbol{Z}}(1)$ であることより従う。 $\square$

**Lem 2.** $\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ とせよ。

$$f_\sigma := p^{-1}\sigma(p) \in \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\};\overrightarrow{01})$$

とおくと、

$$\sigma(y) = f_\sigma^{-1} y^{\chi(\sigma)} f_\sigma$$

である。

**証明．** 上と同様にして

$$\sigma(y') = {y'}^{\chi(\sigma)}$$

である。これより

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= \sigma(p^{-1}y'p) = \sigma(p^{-1})\sigma(y')\sigma(p) \\ &= f_\sigma^{-1}{y'}^{\chi(\sigma)}f_\sigma = f_\sigma^{-1}y^{\chi(\sigma)}f_\sigma\end{aligned}$$

が出る。 $\square$

**Lem 3.** $\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ としたとき、

$$f_\sigma \in [\widehat{F_2},\widehat{F_2}] \qquad (: \widehat{F_2} \text{ の topological commutator})$$

である。

**証明．** $\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}$ のアーベル被覆への $f_\sigma$ の作用をみることで簡単に確かめられる。 $\square$

**Lem 4.** $\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ に対して、

$$\boxed{f_\sigma(x,y)f_\sigma(y,x) = 1 \qquad ((\textbf{2-cycle relation}))}$$

が成り立つ[1]。

**証明．**

$$\begin{aligned}\theta &: \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\};\overrightarrow{01}) \longrightarrow \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\};\overrightarrow{10}),\\ \theta &: \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\};\overrightarrow{01},\overrightarrow{10}) \longrightarrow \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\};\overrightarrow{10},\overrightarrow{01}),\end{aligned}$$

を、

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\} &\longrightarrow \mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\} \\ t &\longmapsto 1-t\end{aligned}$$

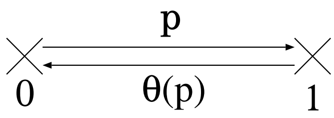
[1] 群準同型 $\Phi : \widehat{F_2} \to H$ に対して、$g \in \widehat{F_2}$ の像 $\Phi(g)$ を $g(\Phi(x),\Phi(y))$ と書くことにしている。

により誘導される射とすると、

$$\theta(x) = pyp^{-1}, \qquad \theta(y) = pxp^{-1}$$

であり、また

$$\theta(p)p = 1$$




である。これに $\sigma$ を作用させることにより、

$$\begin{aligned}1 &= \sigma(\theta(p)p) = \sigma(\theta(p))\sigma(p) = \theta(\sigma(p))\sigma(p) \\ &= \theta(pf_\sigma)pf_\sigma = \theta(p)\theta(f_\sigma)pf_\sigma \\ &= \theta(p)f_\sigma(\theta(x),\theta(y))pf_\sigma = \theta(p)pf_\sigma(y,x)p^{-1}pf_\sigma \\ &= f_\sigma(y,x)f_\sigma(x,y)\end{aligned}$$

が出る。 □

**Lem 5.** $\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ に対して、$m_\sigma = \dfrac{\chi(\sigma)-1}{2}, z = (xy)^{-1}$ とおくと、

$$\boxed{f_\sigma(z,x)z^{m_\sigma}f_\sigma(y,z)y^{m_\sigma}f_\sigma(x,y)x^{m_\sigma} = 1 \qquad ((\textbf{3-cycle relation}))}$$

が成り立つ。

**証明 .** $\pi_1^{\mathrm{top}}(T_1^\times(\boldsymbol{C}); \overrightarrow{10}, \overrightarrow{1\infty})$ において原点の周りを時計回りに半周するパスが埋め込み

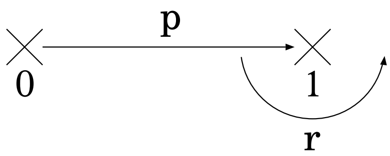
$$\pi_1^{\mathrm{top}}(T_1^\times(\boldsymbol{C}); \overrightarrow{10}, \overrightarrow{1\infty}) \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbf{P}^1(\boldsymbol{C}) \setminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{10}, \overrightarrow{1\infty})$$

により定める $\widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{10}, \overrightarrow{1\infty})$ の元を、$r$ と書くことにする。

$$r^{-1}\sigma(r) = \theta(x)^{m_\sigma}$$

である。$q = rp$ とおくと、

$$\begin{aligned}q^{-1}\sigma(q) &= p^{-1}r^{-1}\sigma(r)\sigma(p) \\ &= p^{-1}\theta(x)^{m_\sigma}pp^{-1}\sigma(p) \\ &= y^{m_\sigma}p^{-1}\sigma(p) = y^{m_\sigma}f_\sigma\end{aligned}$$




となる。

$$\omega : \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}) \longrightarrow \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{1\infty}),$$
$$\omega : \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{1\infty}) \longrightarrow \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}; \overrightarrow{1\infty}, \overrightarrow{\infty 0}),$$

を、

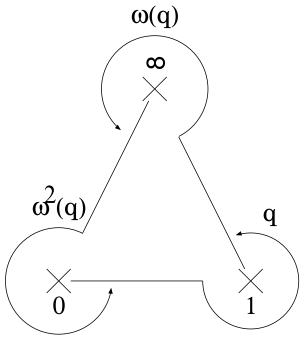
$$\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\} \longrightarrow \mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}$$
$$t \longmapsto \frac{1}{1-t}$$

により誘導される射とすると、

$$\begin{aligned} \omega(x) &= qyq^{-1}, & \omega^2(x) &= \omega(q)qzq^{-1}\omega(q)^{-1} \\ \omega(y) &= qzq^{-1}, & \omega^2(y) &= \omega(q)qxq^{-1}\omega(q)^{-1} \\ \omega(z) &= qxq^{-1}, & \omega^2(z) &= \omega(q)qyq^{-1}\omega(q)^{-1} \end{aligned}$$

であり、

$$\omega^2(q)\omega(q)q = 1$$




が成り立っている。これに $\sigma$ を作用させることにより、

$$\begin{aligned} 1 &= \sigma(\omega^2(q)\omega(q)q) = \sigma(\omega^2(q))\sigma(\omega(q))\sigma(q) \\ &= \omega^2(\sigma(q))\omega(\sigma(q))\sigma(q) \\ &= \omega^2(qy^{m_\sigma}f_\sigma)\omega(qy^{m_\sigma}f_\sigma)qy^{m_\sigma}f_\sigma \\ &= \omega^2(q)\omega(q)qx^{m_\sigma}q^{-1}\omega(q)^{-1}\omega^2(f_\sigma)\omega(q)qz^{m_\sigma}q^{-1}\omega(f_\sigma)qy^{m_\sigma}f_\sigma \\ &= x^{m_\sigma}q^{-1}\omega(q)^{-1}f_\sigma(\omega(q)qzq^{-1}\omega(q)^{-1}, \omega(q)qxq^{-1}\omega(q)^{-1}) \\ &\qquad \omega(q)qz^{m_\sigma}q^{-1}f_\sigma(qyq^{-1}, qzq^{-1})qy^{m_\sigma}f_\sigma(x,y) \\ &= x^{m_\sigma}q^{-1}\omega(q)^{-1}\omega(q)qf_\sigma(z,x)q^{-1}\omega(q)^{-1}\omega(q)qz^{m_\sigma}q^{-1}qf_\sigma(y,z)q^{-1}qy^{m_\sigma}f_\sigma(x,y) \\ &= x^{m_\sigma}f_\sigma(z,x)z^{m_\sigma}f_\sigma(y,z)y^{m_\sigma}f_\sigma(x,y) \end{aligned}$$

が出る。 □

次に 5-cycle relation について解説する。これはちと面倒で、$\mathbf{P}^1$ 上の 5 点のモジュライ空間

$$\mathcal{M}_{0,5} = \left\{(z_1, \ldots, z_5) \in (\mathbf{P}^1)^5 \middle| z_i \neq z_j (i \neq j)\right\} / \mathrm{PGL}(2)$$

を用いる。(ちなみに $\mathcal{M}_{0,5} \simeq \mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ である。)

$\mathcal{M}_{0,5}$ の 5 点を次の様に入れ換えることにより 5 次対称群の作用が定まる。

$$(x_1, \ldots, x_5) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(5)}) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_5)$$

[I2] では 2 変数 Puisuex 級数を用いて $\mathfrak{S}_5$ 対称な tangential base point $P_0$ が構成されており、これを基点とした基本群 $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathcal{M}_{0,5}; P_0)$ は $\mathcal{P}_5^* = \mathcal{P}_5/(\mathrm{center})$ ($\mathcal{P}_5$: 5 本純組紐群) と同一視され、standard generator $x_{ij}(1 \leq i, j \leq 5)$ で生成される。

[I2] Proposition 2.5 は次の様に言い換えられる。$(1\,3\,5\,2\,4) \in \mathfrak{S}_5$ が定める $\mathrm{Aut}\mathcal{M}_{0,5}$ の元を $c$ とする。

**Lem 6.** 自然な埋め込み

$$\tau : \widehat{\pi_1}(\mathbf{P}^1_{\boldsymbol{Q}} \setminus \{0, 1, \infty\}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}) \longrightarrow \widehat{\pi_1}(\mathcal{M}_{0,5}; P_0, c(P_0))$$

があり、これは Galois equivariant になっている。

この lemma より、$\tau(p) = l$ とおくと、

$$l^{-1}\sigma(l) = \tau(p^{-1}\sigma(p)) = \tau(f_\sigma)$$

であることが分かる。$\tau(x) = x_{45}, \tau(y) = x_{34}$ であることを使うと、

$$l^{-1}\sigma(l) = f_\sigma(x_{45}, x_{34})$$

となる。

**Lem 7.** $\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ に対して、

$$\boxed{f_\sigma(x_{12}, x_{23}) f_\sigma(x_{34}, x_{45}) f_\sigma(x_{51}, x_{12}) f_\sigma(x_{23}, x_{34}) f_\sigma(x_{45}, x_{51}) = 1 \qquad \text{in } \widehat{\mathcal{P}_5}^* \quad ((\textbf{5-cycle relation}))}$$

が成り立つ。

**証明** . 記号の乱用だが、

$$c^i : \widehat{\pi_1}(\mathcal{M}_{0,5}; P_0, c(P_0)) \longrightarrow \widehat{\pi_1}(\mathcal{M}_{0,5}; c^i(P_0), c^{i+1}(P_0))$$

を、自己同型 $c^i : \mathcal{M}_{0,5} \to \mathcal{M}_{0,5}$ $(1 \leq i \leq 5)$ より誘導される射とする。$\widehat{\pi_1}(\mathcal{M}_{0,5}; P_0)$ において

$$(\star) \qquad c^4(l)c^3(l)c^2(l)c(l)l = 1$$

が成り立っていることが確かめられる。

$$\begin{aligned}
\sigma(c(l)) &= c(l)lf_\sigma(x_{12},x_{51})l^{-1}\\
\sigma(c^2(l)) &= c^2(l)c(l)lf_\sigma(x_{34},x_{23})l^{-1}c(l)^{-1}\\
\sigma(c^3(l)) &= c^3(l)c^2(l)c(l)lf_\sigma(x_{51},x_{45})l^{-1}c(l)^{-1}c^2(l)^{-1}\\
\sigma(c^4(l)) &= c^4(l)c^3(l)c^2(l)c(l)lf_\sigma(x_{23},x_{12})l^{-1}c(l)^{-1}c^2(l)^{-1}c^3(l)^{-1}
\end{aligned}$$

Lem. 4 と Lem. 5 と同様にして、$(\star)$ に $\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$ を作用させることにより、

$$\begin{aligned}
1 &= \sigma(c^4(l)c^3(l)c^2(l)c(l)l)\\
&= \sigma(c^4(l))\sigma(c^3(l))\sigma(c^2(l))\sigma(c(l))\sigma(l)\\
&= c^4(l)c^3(l)c^2(l)c(l)lf_\sigma(x_{23},x_{12})l^{-1}c(l)^{-1}c^2(l)^{-1}c^3(l)^{-1}\cdot\\
&\qquad c^3(l)c^2(l)c(l)lf_\sigma(x_{51},x_{45})l^{-1}c(l)^{-1}c^2(l)^{-1}\cdot\\
&\qquad\qquad c^2(l)c(l)lf_\sigma(x_{34},x_{23})l^{-1}c(l)^{-1}\cdot\\
&\qquad\qquad\qquad c(l)lf_\sigma(x_{12},x_{51})l^{-1}\cdot\\
&\qquad\qquad\qquad\quad lf_\sigma(x_{45},x_{34})\\
&= c^4(l)c^3(l)c^2(l)c(l)l\cdot\\
&\qquad f_\sigma(x_{23},x_{12})f_\sigma(x_{51},x_{45})f_\sigma(x_{34},x_{23})f_\sigma(x_{12},x_{51})f_\sigma(x_{45},x_{34})\\
&= f_\sigma(x_{23},x_{12})f_\sigma(x_{51},x_{45})f_\sigma(x_{34},x_{23})f_\sigma(x_{12},x_{51})f_\sigma(x_{45},x_{34})
\end{aligned}$$

2-cycle relation より

$$\begin{aligned}
&= f_\sigma(x_{12},x_{23})^{-1}f_\sigma(x_{45},x_{51})^{-1}f_\sigma(x_{23},x_{34})^{-1}f_\sigma(x_{51},x_{12})^{-1}f_\sigma(x_{34},x_{45})^{-1}\\
&= (f_\sigma(x_{34},x_{45})f_\sigma(x_{51},x_{12})f_\sigma(x_{23},x_{34})f_\sigma(x_{45},x_{51})f_\sigma(x_{12},x_{23}))^{-1}
\end{aligned}$$

となり、5-cycle relation を導き出すことができる。 □

Lem. 1 〜 Lem. 7 を併せると、

$$G_{\boldsymbol{Q}} \hookrightarrow \widehat{GT}$$

であることが従う。 (証明終)

## 2. 最後に

§1 で $G_{\boldsymbol{Q}}$ が $\widehat{GT}$ へ単射で埋め込まれることをみたが、この埋め込みが全射であるかどうか、即ち $G_{\boldsymbol{Q}} = \widehat{GT}$ かどうか、は未だに分かっておらず、基本的な未解決問題である。

現在の所、$G_{\boldsymbol{Q}}$ が $\widehat{GT}$ 内で満たす様々な他の関係式が発見されている ([I3], [LNS], [NS], [NT],etc.) が、それらはいずれも 2-,3-,5-cycle relation から導き出せない真に新しい関係式かどうか定かでなく、$G_{\boldsymbol{Q}} \neq \widehat{GT}$ を決定付けるには至っていない。

## 参考文献


[De] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in "Galois groups over $\boldsymbol{Q}$", Y. Ihara, K. Ribet, J.-P. Serre (eds.), MSRI Publ. 16, 79–297, Springer-Verlag, 1989.

[Dr] V. G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely related with Gal($\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q}$), Leningrad J. 2 (1991), 829–860.

[I1] Y. Ihara, Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, Proc. ICM (Kyoto, 1990), 99–120.

[I2] Y. Ihara, On the embedding of Gal($\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q}$) into $\widehat{GT}$, in "The Grothendieck theory of dessins d'enfants", L. Schneps (ed.), London Math. Soc. Lec. Note Ser. 200, 289–321, Cambridge, 1994.

[I3] Ihara,Y., On beta and gamma functions associated with the Grothendieck-Teichmüller modular group II, J. reine und angew. Math. 527 (2000), 1–11.

[IM] Y. Ihara, M. Matsumoto, On Galois actions on profinite completion of braid groups, in "Recent developments in the inverse Galois problem", M. Fried et al. (eds.), Contemp. Math. 186, 173–200, Amer. Math. Soc., 1995.

[LNS] P.Lochak, H.Nakamura, L.Schneps, On a new version of the Grothendieck-Teichmüller group, C. R. Acad. Sci. Paris 325 Ser. I (1997), 11–16.

[NS] H.Nakamura, L.Schneps, On a subgroup of the Grothendieck-Teichmüller group acting on the tower of profinite Teichmüller modular groups, Invent. Math. 141 (2000), no. 3, 503–560.

[NT] H.Nakamura, H.Tsunogai, Harmonic and equianharmonic equations in the Grothendieck-Teichmüller group, Forum. Math. 15(6) (2003), 877–892.