

# 非可換幾何若手勉強会 2015 アブストラクト

名古屋大学多元数理科学研究科

2015年3月9日-3月11日

---

トポロジカル絶縁体周辺の入門的概観

南 範彦 (名古屋工業大学)

トポロジカル絶縁体の基礎について、スピン流を切り口にその工学的興味と物理的背景についての概観を与え、林さんの講演の背景を与えます。また、数学的な観点からは、トポロジカル絶縁体の理論的前身と思える量子ホール効果の TKNN 公式について述べ、更にそのコンヌ流非可換幾何による一般化において、結晶固体力学のブリルアントーラスの非可換版として非可換トーラスが現れる事にも言及します。これにより、夏目さんの講演を聴くより一層の動機を与えます。

---

同変指数とシンプレクティック商のトポロジー

高倉 樹 (中央大学)

群作用をもつシンプレクティック多様体の同変指数とシンプレクティック商の指数の関係を与える定理（かつて量子化予想と呼ばれた定理）と、関連するトピックスについて話す。まず、シンプレクティック商、ケーラー商および GIT 商の基礎的事項を説明し、定理の定式化を与える。その後、いくつかの証明について述べる。また、具体例に関連して、Weyl の指標公式・次元公式とその応用について述べる予定である。

---

指数定理と作用素環 1・2

夏目 利一 (名古屋工業大学)

1、指数定理の理論において重要な役割を果たす作用素環の概説を講義する。基本的な性質を示し、非可換トーラス、非可換球面といった基本的な「非可換多様体」の例を紹介する。

2、 $C^*$ -環の役割はその  $K$  群が葉に沿って楕円型である擬微分作用素の指数の受け皿であることにある。講義 2 では具体的な例を取り扱う。2 次元トーラス上のクロネッカー葉層の  $C^*$ -環の  $K$  群の一つの生成元は有名な Rieffel 射影子である。講義 2 ではその指数が Rieffel 射影子で表される擬微分作用素を考察する。

---

$K$  理論を用いた指数の一般化とその具体例

森吉 仁志 (名古屋大学)

Atiyah-Singer 指数定理において、指数は Fredholm 指数、即ち作用素の核と余核の次元の差として定義さ

れる． $C^*$ 環の  $K$  理論を用いると，ある  $K$  群の要素（これを指数類とよぶ）として指数の定義を拡張することができる．群作用に関して同変な作用素，族作用素，葉層多様体上の作用素，非コンパクト多様体上の作用素などを例にとり，指数類を具体的に説明する．時間に余裕があれば，最近格子ゲージ理論で用いられる Ginsparg-Wilson 型の Dirac 作用素や，Fuzzy sphere 上の指数定理との関連も述べる．

---

### トポロジカル絶縁体におけるバルクエッジ対応とその $K$ 理論的側面

林 晋 (東京大学)

物性物理において、バルク（内側）は絶縁体であるが、バルクのある種のトポロジーを反映してエッジ（境界）にそってある種のカレントが流れる現象のあることが知られており、このような物質はトポロジカル絶縁体と呼ばれている。このバルクとエッジの対応関係（バルクエッジ対応）は、バルクとエッジのそれぞれの情報から定まるある種の指数の対応関係として定式化できる。本講演ではバルクエッジ対応を  $K$  理論の観点から紹介する。古田幹雄、小谷元子、窪田陽介、松尾信一郎、佐藤浩司の諸氏との共同研究。

---

### An introduction to the Baum-Connes conjecture

窪田 陽介 (東京大学)

Baum-Connes 予想について入門的な解説をします．モチベーションと定式化のための道具立てからはじめて、トポロジーへのいくつかの応用と解決のためのいくつかのアプローチまで簡単に紹介します

---

### Gromov - Lawson の相対指数定理

福本 佳泰 (京都大学)

開多様体上の指数定理のひとつである，Gromov - Lawson の relative index theorem の解説をする．大雑把に述べると，2 つの開多様体  $X_0$  と  $X_1$  があって無限遠では “一致” しているときに，それらの指数の差  $\text{ind}(D_0) - \text{ind}(D_1)$  は， $X_0$  と  $X_1$  から作られる或るコンパクト多様体の指数で書けるといえるものである．証明では，Dirac 作用素のパラメトリックスを変形するということがされる．またこの定理は，「Enlargeable な多様体は，metric of positive scalar curvature を持たない。」の証明に応用される．

参考文献はこの論文である: M.Gromov - H.B.Lawson, Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds, Publ. Math. I.H.E.S., 58(1983)83-196.

### Gromov - Lawson's Relative index theorem

Yoshiyasu Fukumoto (Kyoto University)

To briefly explain Gromov - Lawson's Relative index theorem, let  $X_0$  and  $X_1$  be two (open) Riemannian manifolds and assume that they agree at the infinity. Then the difference of their indices  $\text{ind}(D_0) - \text{ind}(D_1)$  can be described as the index of a compact manifold obtained by cutting and patching  $X_0$  and  $X_1$  together. In the proof we will employ a transformation of a parametrices of the Dirac operators. As an application of this theorem we have the following; Enlargeable manifolds do not admit any metrics of positive scalar curvature.

References: M.Gromov - H.B.Lawson, Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds, Publ. Math. I.H.E.S., 58(1983)83-196.

---

## Higher index theory and obstructions to positive scalar curvature

Thomas Schick (University of Göttingen)

Fundamental question in differential geometry: does a given manifold admit a Riemannian metric of positive scalar curvature? Schroedinger and Lichnerowicz found a fundamental relation of this question to the spectral theory of the Dirac operator on curved manifolds: if one has positive scalar curvature, then zero is not in the spectrum. By the famous Atiyah-Singer index theorem, this implies that the index of the Dirac operator must be zero.

But this is only the tip of the iceberg: one can use methods from the K-theory of  $C^*$ -algebras, and methods from large-scale geometry and large-scale index theory to obtain much more powerful results; in particular on spin manifolds with large fundamental groups. We will discuss some examples of these - focusing on the general philosophy behind the index method. The examples will should in particular include constructions where certain submanifolds give obstructions to positive scalar curvature (a phenomenon whose full meaning still remains somewhat mysterious).

---

## 分割された多様体における Roe-Higson 型指数定理

瀬戸 樹 (名古屋大学)

一般に、非コンパクト多様体上の Dirac 型作用素は Fredholm 作用素ではないので、Atiyah-Singer 指数定理を直接一般化することはできない。Roe は完備多様体上で新たに “index class” を定義し、分割された多様体上で指数定理を証明した。Roe の定理は、ある巡回 1 コサイクルと index class とのペアリングが分割を与える閉超曲面上の Dirac 型作用素の Fredholm 指数で与えられることを主張している。Higson は Roe の定理の簡潔な別証明を与え、それを指数のコボルディズム不変性の別証明に応用した。本公演では Roe-Higson の定理とその Toeplitz 作用素を用いた類似について紹介する。

## The Roe-Higson type partitioned manifold index theorem

Tatsuki Seto (Nagoya University)

In general, Dirac type operator is not Fredholm on a non-compact manifold. So we cannot extend the Atiyah-Singer index theorem to a non-compact manifold, directly. Roe constructed the “new index class” on a complete manifold and he proved an index theorem for a partitioned complete manifold. Roe’s theorem states Connes’ pairing of a certain cyclic one-cocycle with the index class is calculated by the Fredholm index of a Dirac type operator on the partitioning hypersurface. Higson gave an alternative and clear proof of Roe’s theorem and apply to the cobordism invariance of the index. In this talk, I will talk about Roe-Higson’s theorem and a Toeplitz operator analogue of Roe-Higson’s theorem.

---