相対不変式で生成されるゴレンスタイン環のレフシェッツ性

和地 輝仁（北海道教育大学）

(京都大学の長岡高広氏との共同研究に基づく)

2021 **年** 3 **月** 11 **日（木）** 16:00–17:30 **東京名古屋代数セミナー**

1. 主結果

1–1. 主結果を述べる準備1 (多項式で生成されるゴレンスタイン環)

$R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

R の R 上の作用を、偏微分で定める。 $x_i \circ F := \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$

斉次多項式 $F \in R$ をとったとき、$R/\operatorname{Ann}_R(F)$ はアルチンゴレンスタイン次数環となる。

アルチン = ベクトル空間として有限次元
ゴレンスタイン = 入射次元が有限

アルチンのとき、
ゴレンスタイン $\Leftrightarrow$ socle が 1 次元 $\Leftrightarrow$ Poincare 双対性を持つ
このとき、特に、斉次成分の次元の列は対称。

反対に、すべてのアルチンゴレンスタイン次数環は、このように構成できる。
(Macaulay の doubel annihilator theorem. cf. 張間-前野-森田-沼田-和地-渡辺純三, The Lefschetz properties. Lecture Notes in Mathematics, 2080. Springer, Heidelberg, 2013. の Theorem 2.71)

1–2. 主結果を述べる準備2 (多項式で生成されるゴレンスタイン環の例)

(1) $F = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ **のとき、**

$R/\operatorname{Ann}_R(F) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{a_1+1}, \ldots, x_n^{a_n+1})$ **(完全交叉)**

(2) $F = \displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$ **のとき、**

$R/\operatorname{Ann}_R(F) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(e_1, \ldots, e_n)$ **(e_i は基本対称式。完全交叉)**

1–3. 主結果を述べる準備3 (レフシェッツ性)

アルチン次数環 $A = \bigoplus_{i=0}^{c} A_i$ **が、(強)** **レフシェッツ性** **を持つとは、**
$l \in A_1$ **が存在して、** $i = 0, 1, \ldots, \lfloor c/2 \rfloor$ **に対して、**

$$\times l^{c-2i} : A_i \to A_{c-i}$$

が全単射であること。
l **を** **レフシェッツ元** **と呼ぶ。**

このとき、特に、斉次成分の次元の列は単峰対称。

図 $: A = A_0 \ \oplus \ A_1 \ \oplus \ A_2 \ \oplus \ A_3 \ \oplus \ A_4 \ \oplus \ A_5$

1–4. 主結果を述べる準備4 (レフシェッツ性を持つ環の例)

(1) 先程の例、$F = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ **のとき、**
$R/\operatorname{Ann}_R(F) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{a_1+1}, \ldots, x_n^{a_n+1})$ **は、**
レフシェッツ性を持つ。$l = x_1 + \cdots + x_n$ **がレフシェッツ元。**

(略証) $n = 1$ **のときは**OK**。レフシェッツ性は、テンソル積で保たれるので、一般の**n **でも**OK**。** □

(2) 先程の例、$F = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$ **のとき、**
$R/\operatorname{Ann}_R(F) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(e_1, \ldots, e_n)$ **(**e_i **は基本対称式) は、**
レフシェッツ性を持つ。$l = \sum_i b_i x_i$ **(**b_i **は互いに異なる) がレフシェッツ元。**

(略証) この環は旗多様体のコホモロジー環と同型なので、コホモロジー環がレフシェッツ性を満たすことから従う。 □

レフシェッツ性が簡単にわかる例であり、さらに、レフシェッツ元の集合が特定できる珍しい例でもある。

1–5. 主結果

定理 R と F が下の表のもの、t が非負整数とするとき、$R/\operatorname{Ann}_R(F^t)$ はレフシェッツ性を持つ。

始めの 3 つの R は、それぞれ対称行列のなす空間、行列全体のなす空間、交代行列のなす空間の座標環である。

PV の型	R	F
(C_n, n)	$\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n]/(x_{ij} - x_{ji})$	$\det(x_{ij})$
(A_{2n-1}, n)	$\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n]$	$\det(x_{ij})$
(D_n, n)	$\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n]/(x_{ij} + x_{ji})$	$\operatorname{Pf}(x_{ij})$ (n: even)
$(\mathsf{B}_m, 1)$, $(\mathsf{D}_m, 1)$	$\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$	$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$
$(\mathsf{E}_7, 7)$	$\mathbb{C}[$27 variables$]$	a polynomial of degree 3

レフシェッツ元のなす空間は、t によらず、概均質ベクトル空間 (PV) の開軌道に一致する。

注意 (可換放物型概均質ベクトル空間) リー群 K が、ベクトル空間 V に作用し、ザリスキ開軌道があるとき、(K, V) を **概均質ベクトル空間** (PV) と呼ぶ。

V 上の多項式 F が、K の作用で定数倍 (指標倍) されるとき、F を **相対不変式** と呼ぶ。

$\mathfrak{g}$ を単純リー代数、
$\mathfrak{p}$ を放物型部分代数、
$\mathfrak{n}^+$ をその冪零根基、
$\mathfrak{k}$ を $\mathfrak{p}$ の Levi 部分代数とする。
K を $\mathfrak{k}$ をリー代数に持つ複素リー群とすると、K は $\mathfrak{n}^+$ に随伴作用で作用する。

$\mathfrak{n}^+$ が可換リー代数のとき、$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ 極大放物型部分代数であることが必要で、このとき、$(K, \mathfrak{n}^+)$ は概均質ベクトル空間になることが知られている。これを、**可換放物型概均質ベクトル空間** と呼ぶ。

可換放物型概均質ベクトル空間であって、相対不変式を持つものは、先程の表にあるものですべてである。

PV の型	R	F
(C_n, n)	$\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n]/(x_{ij} - x_{ji})$	$\det(x_{ij})$
(A_{2n-1}, n)	$\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n]$	$\det(x_{ij})$
(D_n, n)	$\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n]/(x_{ij} + x_{ji})$	$\mathrm{Pf}(x_{ij})$ (n: even)
$(\mathsf{B}_m, 1)$, $(\mathsf{D}_m, 1)$	$\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$	$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$
$(\mathsf{E}_7, 7)$	$\mathbb{C}$[27 variables]	a polynomial of degree 3

例えば (A_{2n-1}, n) **は、**$\mathfrak{g}$ **が** A_{2n-1} **型であり、**$\mathfrak{p}$ **が** n **番目の単純ルートで特徴付けられることを意味する。**

2. 補足

2–1. レフシェッツ性について

アルチンゴレンスタイン環の中の特別なものとして、アルチン完全交叉があるが、

予想: アルチン完全交叉次数環はレシェッツ性を持つ

という大きな予想がある。$n = 3$ で既に未解決である。

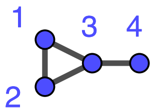
「弱レフシェッツ性」を持つことであれば、$n = 3$ までは証明されている。
特別なイデアルに対しては証明もされているが、一般にはほとんど証明されていないといって良い。

2–2. グラフについて

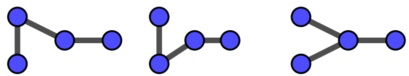
連結単純グラフ $G=(V,E)$ に対し、多項式環 $R=K[x_e \mid e \in E]$ を考え、

$$F_G = \sum_{S:\text{全域木}} \prod_{e\in S} x_e$$

と定め、G の キルヒホッフ多項式 と呼ぶ。



$$\to F_G = x_{12}x_{13}x_{34} + x_{12}x_{23}x_{34} + x_{13}x_{23}x_{34}$$



予想 (前野-沼田): 連結単純グラフのキルヒホッフ多項式で生成されるゴレンスタイン環はレフシェッツ性を持つ

完全グラフのキルヒホッフ多項式は、変数変換をすると対称行列の行列式になるので、上の予想の一部が証明されたことになる。
また、「1 次の所 $(A_1 \to A_{c-1})$」については長岡-矢澤が肯定的に解決した。
キルヒホッフ多項式が、ある概均質ベクトル空間の相対不変式になる条件は、伊師-小木曽。

3. ヘシアン

3–1. レフシェッツ性とヘシアン

多項式 $F \in R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ **のヘシアンは、**

$$\mathrm{Hess}(F) = \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

で定められる。

アルチンゴレンスタイン次数環 $A = R/\operatorname{Ann}_R(F)$ **に対して、** $\times l^{c-2} : A_1 \to A_{c-1}$ **が全単射になるような** $l \in A_1$ **が存在する条件は、** $\mathrm{Hess}(F)$ **が恒等的には** 0 **でないことであると知られている。**

同様に、 A_i **の (例えば単項式の) 基底を** $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ **とすると、** $\times l^{c-2i} : A_i \to A_{c-i}$ **が全単射になるような** $l \in A_1$ **が存在する条件は、**

$$\det\left(\frac{\partial^{2i} F}{\partial \alpha_u \partial \alpha_v}\right)_{1 \le u,v \le s} \qquad \text{(higher Hessian)}$$

が恒等的には 0 **でないことであると知られている。**

3–2. 概均質ベクトル空間の正則性とヘシアン

概均質ベクトル空間 (K, V) **が正則であるとは、** $\operatorname{grad}\log F : V - S \to V^*$ **(**S **は特異集合) の像が** V^* **の中で稠密となるような相対不変式** F **が存在することである。**

そして、正則であることと、ヘシアンが 0 **ではないような相対不変式** F **が存在することが同値であることも知られている。**

つまり、相対不変式 F **から生成されるアルチンゴレンスタイン次数環** $A = R/\operatorname{Ann}_R(F)$ **において、**$\times l^{c-2} : A_1 \to A_{c-1}$ **が全単射になるような** $l \in A_1$ **が存在することは、概均質ベクトル空間** (K, V) **が正則であることと同値である。**

特に、A **がレフシェッツ性を持つならば、**(K, V) **は正則である。**

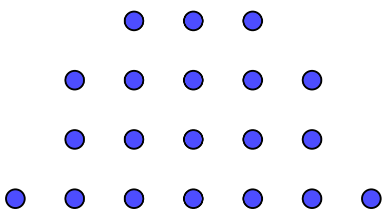
ただ、higher Hessian **の概均質ベクトル空間での意味は不明。**

4. レフシェッツ性と$\mathfrak{sl}_2$-作用

補題 (レフシェッツ性を持つための条件)
$R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$
I: Rの斉次イデアル
$A = R/I$ が対称なヒルベルト関数を持つアルチン次数環のとき、次は同値。

(1) $A = R/I$ はレフシェッツ性を持つ。

(2) $\mathfrak{sl}_2 = \langle x, y, h \rangle$ のA上の作用で、次を満たすものが存在する。
(a) hの固有空間分解とAの斉次成分分解が一致
(b) yの作用がAのある1次式による掛け算作用と一致 □



ヒルベルト関数 $(1, 3, 4, 4, 4, 3, 1)$
レフシェッツ性を持つなら$\mathfrak{sl}_2$-既約分解は、
次元が$7 + 5 + 5 + 3$
次数が高い方をウェイトが低いと見る

主結果の証明では、前頁の補題を用いるため、「良い」$\mathfrak{sl}_2$-triple を探す。

例えば、(C_n, n) 型のとき、
$R = \mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]/(x_{ij} - x_{ji})$
$F = \det(x_{ij})$

$K = GL_n(\mathbb{C})$ が自然に R や $R/\operatorname{Ann}_R(F)$ 上に作用するが、目的の $\mathfrak{sl}_2$ は、$\mathfrak{k}$ の部分代数としては取れない(作用が次数を変えないから)。

鍵となるアイデアは、$\mathfrak{k}$ よりも大きなリー代数を R や $R/\operatorname{Ann}_R(F)$ 上に作用させ、その中に目的の $\mathfrak{sl}_2$ を取ること。

5. 可換放物型概均質ベクトル空間

5–1. セッティング

$\mathfrak{g}$ を複素単純リー代数、
$\mathfrak{p}$ をその放物型部分代数、
$\mathfrak{n}^+$ を $\mathfrak{p}$ の冪零根基で可換を仮定する。
$\mathfrak{p}$ のレビ部分代数 $\mathfrak{k}$ をリー環に持つ複素リー群を K とする。
$(K, \mathfrak{n}^+)$ は (可換放物型) 概均質ベクトル空間になる。

そのうち、先に述べた、(A_{2m-1}, m), $(\mathrm{B}_n, 1)$, $(\mathrm{D}_n, 1)$, (C_n, n), $(\mathrm{D}_{2m}, 2m)$, $(\mathrm{E}_7, 7)$ の場合、相対不変式が存在し、既約相対不変式を F とする。

次頁以降に、$(\mathrm{E}_7, 7)$ を除くリー環の実現を念のため記す。

$(\mathbf{A}_{n-1}, m)$ 型

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{gl}_n, \\
\mathfrak{p} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}_m, D \in \mathfrak{gl}_{n-m}, B \in \mathrm{Mat}(m, n-m, \mathbb{C}) \right\}, \\
\mathfrak{k} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}_m, D \in \mathfrak{gl}_{n-m} \right\}, \\
\mathfrak{n}^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \;\middle|\; B \in \mathrm{Mat}(m, n-m, \mathbb{C}) \right\},
\end{aligned}$$

$\varpi_j = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (**ベクトルの長さは** n **で** 1 **が** j **個**$, j = 1, 2, \ldots, n-1)$

(A_{2m-1}, m) **のとき、** $F = \det B$.

$(\mathbf{C}_n, n)$ **型**

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_n = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}_n,\ B, C \in \mathrm{Sym}_n \right\},$$
$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}_n,\ B \in \mathrm{Sym}_n \right\},$$
$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}_n, \right\},$$
$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; B \in \mathrm{Sym}_n \right\},$$

$$\varpi_j = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \qquad (\mathbf{1}\,\text{が}\,j\,\text{個}, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$F = \det B.$

$(\mathbf{D}_n, n)$ **型**

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}_n,\ B, C \in \mathrm{Alt}_n \right\},$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}_n,\ B \in \mathrm{Alt}_n \right\},$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}_n, \right\},$$

$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; B \in \mathrm{Alt}_n \right\},$$

$$\varpi_j = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \qquad (\text{1 が } j \text{ 個}, j = 1, 2, \ldots, n-2)$$
$$\varpi_{n-1} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$
$$\varpi_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$$

$(\mathsf{D}_{2m}, 2m)$ **のとき、**$F = \mathrm{Pf}\, B$ (**パフィアン**).

$(\mathrm{B}_n, 1)$ 型、$(\mathrm{D}_n, 1)$ 型　**記述を簡単にするため、通常とは逆の対角線に関する転置 ${}^T X$ を用いる。B_n のとき $m = 2n+1$、D_n のとき $m = 2n$ とする。**

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_m = \left\{X \in \mathrm{Mat}_m \mid X + {}^T X = 0\right\},$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -{}^T v & 0 \\ 0 & D & v \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}^{m-2}, D + {}^T D = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}, D + {}^T D = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -{}^T v & 0 \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \,\middle|\, v \in \mathbb{C}^{m-2}, \right\},$$

D_n 型の基本ウェイトは上述したので、B_n 型の基本ウェイトのみ記す。

$$\varpi_j = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \qquad (1\,\text{が}\,j\,\text{個}, j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\varpi_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$$

$F = \langle v, v \rangle.$

$(\mathbf{E}_6,\ \mathbf{1})$ 型、$(\mathbf{E}_7,\ \mathbf{7})$ 型 **省略。$(\mathrm{E}_7,\ 7)$ 型では相対不変式が存在。**

5–2. 一般 Verma 加群

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{k}$ 等は同じ記号とする。
$\mathfrak{p}$ の 1 次元表現 $(\mu, \mathbb{C}_\mu)$ をとり、

$$M(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\mu$$

と定める (スカラー型一般 Verma 加群) ($U(-)$ は普遍包絡環)。

$\mathfrak{n}^+$ の opposite を $\mathfrak{n}^-$ とすると、

$$M(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\mu = U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{p}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\mu \cong U(\mathfrak{n}^-)$$

という線形同型があるので、

$$M(\mu) \cong S(\mathfrak{n}^-) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$$

という線形同型があります。($S(\mathfrak{n}^-)$ は対称代数)

こうして、$R=\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$ 上に、$\mathfrak{k}$ より大きい $\mathfrak{g}$ の作用が入る。
(例えば、(C_n, n) の場合、R 上に、$\mathfrak{gl}_n$ より大きな $\mathfrak{sp}_n$ の作用が入る)

この表現を $(\psi_\mu, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+])$ と表すことにする。

命題 $(\psi_\mu, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+])$ における $\mathfrak{n}^-$ と $\mathfrak{k}$ の作用は次で与えられる。

$$\psi_\mu(X) = X \qquad (\text{掛け算作用}) \qquad (X \in \mathfrak{n}^-)$$
$$\psi_\mu(X) = \mathrm{ad}(X) + \mu(X) \qquad (X \in \mathfrak{k})$$

特に、$(\psi_\mu, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+])$ の部分加群は多項式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$ のイデアルになる。また、$\mathfrak{k}$ の作用は、単なる随伴作用から定数 $\mu(X)$ だけずれたものなので、$(\psi_\mu, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+])$ の $\mathfrak{k}$-既約分解は、随伴作用による $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$ の $\mathfrak{k}$-既約分解と同じ。(各既約成分の最高ウェイトは変わる)。 $\square$

図: $M(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\mu = U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{p}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\mu \cong U(\mathfrak{n}^-)$

5–3. R の $\mathfrak{k}$-既約分解

最高ウェイトが λ である有限次元既約 $\mathfrak{k}$-表現を V_λ と書く。

命題 $(\mathfrak{k}, \mathrm{ad}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+])$ は無重複に既約分解する。
$\mathfrak{k}$ のウェイト (正ルートの和) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ が取れ、その分解は、

$$\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+] = \bigoplus_{k_1,\ldots,k_r \geq 0} V_{-k_1\lambda_1 - \cdots - k_r\lambda_r}$$

と表せる (マイナスなのは多項式が負のウェイトなので)。 □

例えば、(C_n, n) の場合、$r = n$ であり、各既約成分の最高ウェイトベクトルは、$f_1, f_2, \ldots, f_n$ の冪積 $f_1^{k_1} f_2^{k_2} \cdots f_n^{k_n}$ である。
ここで、f_i は、$\mathfrak{n}^+ = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ 上の多項式であって、(右下に詰めた) i 次主小行列式である。

特に、既約相対不変式 F の冪 F^t は、1 次元表現 $V_{-t\lambda_n}$ に属する。

また、先述したように、$\psi_\mu(\mathfrak{k})$ の作用による分解も、これに一致する。

6. 主結果の証明

6–1. $\mathrm{Ann}_R(F^t)$ の特定

命題 概均質ベクトル空間 $(K, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ の既約相対不変式を F とするとき、

$$\mathrm{Ann}(F^t) = \bigoplus_{\substack{k_1,\ldots,k_r \geq 0 \\ k_1+\cdots+k_r > t}} V_{-k_1\lambda_1-\cdots-k_r\lambda_r}$$

← ここが追加

である。従って、

$$R_{F^t} := R/\mathrm{Ann}(F^t) \cong \bigoplus_{\substack{k_1,\ldots,k_r \geq 0 \\ k_1+\cdots+k_r \leq t}} V_{-k_1\lambda_1-\cdots-k_r\lambda_r}$$

である。

(証明) 微分して消えることはウェイトを見るとわかり、微分して消えないことは、実際に微分を計算してわかる。 □

6–2. $\mathrm{Ann}_R(F^t)$ 上の $\mathfrak{g}$-作用の存在

R の上には $\psi_\mu(\mathfrak{g})$ が作用したが、$\mathrm{Ann}_R(F^t)$ にも作用すれば、
問題の次数環 $R/\mathrm{Ann}_R(F^t)$ に、「大きな」リー代数 $\mathfrak{g}$ が作用する。

幸運にも、$\mathrm{Ann}_R(F^t)$ は、ある μ に対する、一般 Verma 加群 $M(\mu)$ の唯一の極大部分加群に一致する。

命題　非負整数 t に対して、$\mu = \frac{t}{2}\lambda_r$ とすると、スカラー型一般 Verma 加群 $M(\mu) \cong (\psi_\mu, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+])$ の極大部分加群 $Y_\mu \subset \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$ は、$\mathrm{Ann}_R(F^t)$ に等しい。
従って、$R_{F^t} = \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]/\mathrm{Ann}_R(F^t)$ には ψ_μ を通して $\mathfrak{g}$ が作用する。

(証明) 最高ウェイト加群の極大部分加群は、ある双 1 次形式 (Shapovarov 形式) の根基に一致する。
これを用いて、$M(\mu)$ の極大部分加群が決定できる。 $\square$

参考: $V_\lambda \subset Y_\mu \iff q_\mu(\lambda) = 0; \quad q_\mu(\lambda) = \text{const} \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{m=0}^{k_{i+1}+\cdots+k_r-1} (\frac{ic}{2} + t - m)$

6–3. $\mathfrak{sl}_2$-triple の取り方

「良い」$\mathfrak{sl}_2$-triple を $\mathfrak{g}$ の中に取りたい。

補題 (再掲) (レフシェッツ性を持つための条件)

$R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

I: R の斉次イデアル

$A = R/I$ が対称なヒルベルト関数を持つアルチン次数環のとき、次は同値。

(1) $A = R/I$ はレフシェッツ性を持つ。

(2) $\mathfrak{sl}_2 = \langle x, y, h \rangle$ の A 上の作用で、次を満たすものが存在する。

(a) h の固有空間分解と A の斉次成分分解が一致

(b) y の作用が A のある 1 次式による掛け算作用と一致 □

命題 (再掲) $(\psi_\mu, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+])$ における $\mathfrak{n}^-$ と $\mathfrak{k}$ の作用は次で与えられる。

$$\psi_\mu(X) = X \qquad (\text{掛け算作用}) \qquad (X \in \mathfrak{n}^-)$$

$$\psi_\mu(X) = \mathrm{ad}(X) + \mu(X) \qquad (X \in \mathfrak{k}) \quad \square$$

h をまず決める必要がある。h は次数作用素、つまり、$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}^+$ の次数付けを与える元 (の定数倍)。常に存在する。

h は $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}^+$ の次数付けを与える元。

h を含む $\mathfrak{sl}_2$-triple があるかは、weighted ディンキン図形を考えるのが筋だが、可換放物型概均質ベクトル空間の場合は、(type free で) 目の子で取れ、$y \in \mathfrak{n}^-$ は、概均質ベクトル空間 $(K, \mathfrak{n}^+)$ の開軌道のある元となる。

例えば、(C_n, n) の場合、$n \times n$ のブロック 4 つに分割して表すと、

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

である。

6–4. 主結果再掲

定理 (再掲) R と F が下の表のもの、t が非負整数とするとき、$R/\operatorname{Ann}_R(F^t)$ はレフシェッツ性を持つ。

始めの 3 つの R は、それぞれ対称行列のなす空間、行列全体のなす空間、交代行列のなす空間の座標環である。

PV の型	R	F
(C_n, n)	$\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n]/(x_{ij} - x_{ji})$	$\det(x_{ij})$
(A_{2n-1}, n)	$\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n]$	$\det(x_{ij})$
(D_n, n)	$\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n]/(x_{ij} + x_{ji})$	$\mathrm{Pf}(x_{ij})$　(n: even)
$(\mathsf{B}_m, 1)$, $(\mathsf{D}_m, 1)$	$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$	$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$
$(\mathsf{E}_7, 7)$	$\mathbb{C}[$27 variables$]$	a polynomial of degree 3

レフシェッツ元のなす空間は、t によらず、概均質ベクトル空間 (PV) の開軌道に一致する。

6–5. レフシェッツ元の集合について補足

$R = \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$ には群 K が作用しており、また、レフシェッツ元であることは群作用で保存されるので、開軌道上の 1 点がレフシェッツ元であれば、開軌道上の点はすべてレフシェッツ元である。

6–6. 例

(C_n, n) の場合、

$R = \mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n]/(x_{ij} - x_{ji})$

$F = \det(x_{ij})$

$$\operatorname{Ann}(F) = \bigoplus_{\substack{k_1,\dots,k_n \ge 0 \\ k_1+\cdots+k_n > 1}} V_{-k_1\lambda_1-\cdots-k_n\lambda_n}$$

である。従って、

$$\begin{aligned} R_F = R/\operatorname{Ann}(F) &\cong \bigoplus_{\substack{k_1,\dots,k_n \ge 0 \\ k_1+\cdots+k_n \le 1}} V_{-k_1\lambda_1-\cdots-k_n\lambda_n} \\ &= V_0 \oplus V_{-\lambda_1} \oplus \cdots V_{-\lambda_n} \end{aligned}$$

である。この分解は、斉次成分分解とも一致している(この場合は斉次成分が $\mathfrak{t}$-既約表現)。

レフシェッツ元は、$l = x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn}$ (および、これを $GL_n(\mathbb{C})$-作用で写したもの)。

(おわり)