佐藤　猛　(さとう　たけし／SATO, Takeshi)　助教

研　究　室　理学部 A 館 359 号室　　(内線 2425)

電子メール　`sato@math.nagoya-u.ac.jp`

研究テーマ

- 周期関係式
- 円周率

研究テーマの概要

20 世紀の始めにラマヌジャンという, 風変わりな公式を数多く発見した数学者がいました. そうした公式の周辺, たとえばモジュラ関数, 超幾何関数などの特殊関数とそれに付随したモジュラ方程式や微分方程式なんかを私は研究しています. 一般論よりも個別の対象を調べるのが好きです. 興味を持っている具体的なテーマは, 円周率の新しい計算アルゴリズム (反復アルゴリズムや級数表示) などです.

たとえば c_n を漸化式 $n^2c_n + (-11n^2 + 11n - 3)c_{n-1} - (n-1)^2c_{n-2} = 0$. $(1, 3, 19, 147, 1251, 11253, 104959, \ldots)$ で定義し, $f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ とおくと, r_1, r_2 が $(\phi^5 + r_1)(\phi^5 + r_2) = 1 + \phi^{10}$ をみたすとき $\left(\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, 次が成立します:

$$\boxed{(\phi^5 + r_1)f'(r_1)f(r_2) + (\phi^5 + r_2)f'(r_2)f(r_1) + f(r_1)f(r_2) = \frac{\phi^{5/2}}{5^{1/4}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_1 r_2}.}$$

この関係式から次の円周率の反復公式が導かれます:

$$r_0 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad B_0 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= r_n(1 - 2r_n + 4r_n^2 - 3r_n^3 + r_n^4), \\ b_n &= 1 + 3r_n + 4r_n^2 + 2r_n^3 + r_n^4. \end{aligned}$$

$$r_n = \sqrt[5]{\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}}, \quad B_n = \frac{-1 - r_n^{10}}{\sqrt{5}a_n b_n} + \frac{\frac{1}{r_n} + r_n}{5\sqrt{5}} + \frac{5r_n^5}{a_n b_n}B_{n-1}.$$

$$\frac{1}{\pi} = 2\lim_{n\to\infty} 5^n B_n.$$

次の表でみるように, この公式は 5 次収束します.

n	$\frac{1}{\pi} - 2 \cdot 5^n B_n$	n	$\frac{1}{\pi} - 2 \cdot 5^n B_n$	n	$\frac{1}{\pi} - 2 \cdot 5^n B_n$
0	$-2.2 \cdot 10^{-2}$	3	$-1.0 \cdot 10^{-338}$	6	$-2.7 \cdot 10^{-42632}$
1	$-1.1 \cdot 10^{-12}$	4	$-2.1 \cdot 10^{-1702}$	7	$-1.2 \cdot 10^{-213178}$
2	$-1.5 \cdot 10^{-66}$	5	$-1.3 \cdot 10^{-8523}$	8	$-8.2 \cdot 10^{-1065913}$

主要論文・著書

[1] T. Sato, A quintically converging algorithm for π, in preparation.