# 2023年度修了テスト 2023年7月26日実施

**試験について**

1. 試験終了時刻は黒板に記載する．
2. 座席表に従って着席し，学生証を机に出しておくこと．
3. 途中退室は試験開始後 90 分経過してから許可する．
4. 問題用紙：2 枚・答案用紙：4 枚・草稿用紙：4 枚．
5. 答案用紙の追加は認めない．
6. 答案用紙のみを回収する．
7. 各問 30 点満点の計 120 点満点であり，90 点以上を合格とする．
8. 不正行為は決してしないこと．
9. 携帯電話の電源は切っておくこと．

**答案作成についての注意事項**

1. 全ての答案用紙の左上に問題番号を，上部に学生番号と氏名を記入すること．
2. 答案は各問題について一枚を使用すること．
3. 答案用紙の裏面を使用してもよい．表面の最下行にその旨を明記すること．
4. 数学的論証の表現力も採点対象である．**いきなり答案用紙に書くのではなく，草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと**．
5. 解答者の理解の正確さを示すことがこのテストの目的である．論証においては「明らかに」という表現は避け，要点を的確に記すこと．
6. もしも途中に解けない小問があっても，その結果を認めて後続の小問を解いてよい．

**試験後の注意事項**

1. 合否の連絡は，8 月 3 日までに TACT で行う．
2. 不合格のときは 2024 年度予備テストを受験せねばならない．

$\boxed{1}$ 正の実数 $x$ に対して定義された実数値関数 $g(x)$ と実定数 $a$ に対して, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を以下のように定義する.

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & (x > 0) \\ a & (x = 0) \\ g(-x) & (x < 0) \end{cases}.$$

(1) $x > 0$ に対して関数 $g(x)$ を

$$g(x) := \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

で定める. このとき, $f(x)$ が $x = 0$ で連続になるように $a$ の値を定めよ.

(2) (1) で定めた $f(x)$ について $f'(0)$ を求め, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で $C^1$ 級となることを示せ.

(3) 以下の (i), (ii) を同時に満たす $g(x)$ の例を挙げ, そのことを説明せよ.

(i) $g(x)$ は $x > 0$ で <u>有界</u> かつ <u>連続</u> な関数.

(ii) $a$ をどのような値に定めても, $f(x)$ は $x = 0$ で連続にならない.

$\boxed{2}$ $f$ を開区間 $(0, 1)$ で定義された函数とする．$f$ が一様連続であるとは,

任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x - y| < \delta$ となる任意の $x, y \in (0, 1)$ に対して，$|f(x) - f(y)| < \epsilon$ が成り立つ

ことである．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x) = \sin(1/x)$ とするとき，$f$ は一様連続か？ 理由とともに答えよ．

(2) $f$ が一様連続ならば有界であることを示せ．ここで，$f$ が有界であるとは,

ある正実数 $M > 0$ が存在して，任意の $x \in (0, 1)$ に対して，$|f(x)| < M$ が成り立つ

ことである．

(3) $f$ が一様連続ならば，$x_n \in (0, 1)$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列になることを示せ.

$\boxed{3}$ $V \coloneqq \mathbb{R}^n$ とおき, $f\colon V \to V$ を $V$ 上の恒等的には 0 でない線形変換で, $f \circ f = f$ を満たすものとする. また $V$ 上の線形変換 $g$ を次で定める.

$$g(v) \coloneqq v - f(v) \quad (v \in V).$$

(1) $\operatorname{Im} g \subset \ker f$ を示せ.

(2) $V = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$ を示せ.

(3) 整数 $r$ $(1 \le r \le n)$ と $V$ の適当な基底 $v_1, \ldots, v_n$ を選べば,

$$f(v_i) = \begin{cases} v_i & (i = 1, \ldots, r) \\ 0 & (i = r+1, \ldots, n) \end{cases}$$

を満たすようにできることを示せ.

$\boxed{4}$ $V$ を体 $K$ 上のベクトル空間, $W$ を $V$ の部分空間とする. $v, v' \in V$ に対し

$$v \sim v' \ :\Longleftrightarrow\ v - v' \in W$$

で二項関係 $\sim$ を定義する.

(1) $\sim$ は同値関係であることを示せ. (即ち, (i) 反射律 $v \sim v$, (ii) 対称律 $v \sim v' \Longrightarrow v' \sim v$, (iii) 推移律 $v \sim v'$, $v' \sim v'' \Longrightarrow v \sim v''$ の三つが成り立つことを示せ. ただし, $W$ に関するどのような条件をどう使ったかわかるように書くこと.)

以下では, $V$ の元の同値関係 $\sim$ による同値類の集合 $V/\sim$ を考える. また, $v \in V$ の同値類を $[v]$ $(\in V/\sim)$ と表す.

(2) $V$ の元 $v, v', w, w'$ が $v \sim v'$, $w \sim w'$ を満たすとき, 任意の $K$ の元 $\alpha, \beta$ に対して $\alpha v + \beta w \sim \alpha v' + \beta w'$ であることを示せ.

これより, $[v], [w] \in V/\sim$ と $\alpha, \beta \in K$ に対して $\alpha[v] + \beta[w] \in V/\sim$ を

$$\alpha[v] + \beta[w] \coloneqq [\alpha v + \beta w]$$

により定めることができる. さらに, ここで定めた和とスカラー倍によって $V/\sim$ は $K$ 上のベクトル空間になる. これを $V$ の $W$ による商ベクトル空間と呼び $V/W$ と表す.

(3) $V$ を有限次元とする. $W$ の基底 $\langle e_1, e_2, \ldots, e_r \rangle$ を含む $V$ の基底 $\langle e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n \rangle$ をとる. このとき $\langle [e_{r+1}], \ldots, [e_n] \rangle$ は $V/W$ の基底であることを示せ. (これより $\dim V = \dim W + \dim(V/W)$ であることがわかる.)