2022年度修了テスト

(2022年7月20日実施)

試験について

1. 試験終了時刻は黒板に記載する．
2. 座席表に従って着席し，学生証を机に出しておくこと．
3. 途中退室は試験開始後 90 分経過してから許可する．
4. 問題用紙 2 枚，答案用紙 (罫線あり)4 枚，草稿用紙 (罫線なし)4 枚．
5. 答案用紙の追加は認めない．
6. 答案用紙のみを回収する．
7. 各問 3 点満点の計 12 点満点であり，9 点以上を合格とする．
8. 不正行為は決してしないこと．
9. 携帯電話の電源は切っておくこと．
10. 水分補給時を除きマスクを着用し，感染症対策に留意すること．
11. 体調が悪くなった場合は，速やかに申し出ること．

答案作成についての注意事項

1. 全ての答案用紙の左上に問題番号を，右上に学生番号と氏名を記入すること．
2. 答案は各問題について一枚を使用すること．
3. 答案用紙の裏面を使用してもよい．表面の最下行にその旨を明記すること．
4. 数学的論証の表現力も採点対象である．いきなり答案用紙に書くのではなく，　草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと．
5. 解答者の理解の正確さを示すことがこのテストの目的である．論証においては「明らかに」という表現は避け，要点を的確に記すこと．
6. もしも途中に解けない小問があっても，その結果を認めて後続の小問を解いてよい．

試験後の注意事項

1. 合否の連絡と答案の返却は，7 月 26 日までに NUCT で行う．
2. 不合格者に対しては, 後ほど改めて必要な事項を連絡する.

2022 年度修了テスト試験問題 (1/2)

$\boxed{1}$ f を開区間 $(0,1)$ で定義された函数とする．f が一様連続であるとは，

任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-y| < \delta$ となる任意の $x, y \in (0,1)$ に対して，$|f(x) - f(y)| < \epsilon$ が成り立つ

ことである．このとき，次の問に答えよ．

1. $f(x) = \sin(1/x)$ とするとき，f は一様連続か？理由とともに答えよ．
2. f が一様連続ならば有界であることを示せ．ここで，f が有界であるとは，

   ある正実数 $M > 0$ が存在して，任意の $x \in (0,1)$ に対して，$|f(x)| < M$ が成り立つ

   ことである．
3. f が一様連続ならば，$x_n \in (0,1)$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列になることを示せ．

$\boxed{2}$ $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^k$ のユークリッドノルムとする．$P \in \mathbb{R}^k$ と実数 $\delta > 0$ に対し，$B(P,\delta) := \{Q \in \mathbb{R}^k \mid \|Q - P\| < \delta\}$ とおく．$U \subset \mathbb{R}^k$ が開集合であるとは, 任意の点 $P \in U$ に対しある $\delta > 0$ が存在して $B(P,\delta) \subset U$ が成り立つときをいい，開集合の補集合を閉集合という．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフを $G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ で定義する．

1. 「$x, y \in \mathbb{R}$, 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ ならば $f(x) = y$」が常に成り立つことは, $G_f \subset \mathbb{R}^2$ が閉集合であることと同値であることを示せ.
2. f が連続ならば G_f は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ.
3. G_f が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であっても f は連続とは限らないことを次の例で確かめよ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(注意: $G_f^+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1/x,\ x > 0\}$ について, $1/x$ は $x > 0$ で連続だから (2) より G_f^+ は閉集合という論証は誤り．(2) の仮定は $f \in C(\mathbb{R})$ であり, 例えば, $G_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1,\ x > 0\}$ がその反例となる.)

2022 年度修了テスト試験問題 (2/2)

$\boxed{3}$ V を 有限次元実計量ベクトル空間(内積空間) とし, $\langle u, v\rangle$ で 2 つのベクトル $u, v \in V$ の内積をあらわす. W を V の部分空間とする. また, W のすべてのベクトルと直交するような V のベクトル全体を $W^{\perp}$ とおく:

$$W^{\perp} = \{v \in V : \text{任意の } w \in W \text{ に対して } \langle v, w\rangle = 0\}.$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

1. $W^{\perp}$ は V の部分空間であることを示せ.
2. $w_1, \ldots, w_r$ を W の正規直交基底とする. このとき, $x \in V$ に対して

$$x - (c_1 w_1 + \cdots + c_r w_r) \in W^{\perp}$$

   となるような実数 c_j $(j = 1, \ldots, r)$ を, 内積を用いて表せ.
3. $v_1, \ldots, v_s$ を $W^{\perp}$ の任意の基底とするとき, $w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_s$ は V の基底となることを示せ. また, これより $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$ が成り立つことを結論せよ.

$\boxed{4}$ A は $\mathbb{C}$ 上の 3 次正方行列で, 単位行列を E として $A^3 = E$ をみたすものとする.

1. A の固有値は $1, \omega, \bar{\omega}$ のいずれかであることを示せ. ただし i を虚数単位として $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ であり, また複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ とする.
2. A のジョルダン標準形として可能なものをすべて考えるとき, ジョルダン細胞の次数 n のうち最大のものを求めよ.
3. A の成分がすべて実数であるとき, $\omega, \bar{\omega}$ のうちの一方が A の固有値ならば, 他の一方も A の固有値であることを示せ.